

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA  
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

AGH UNIVERSITY OF SCIENCE  
AND TECHNOLOGY

**AGH**

# **Inżynieria Chemiczna**

## **Transport masy i ciepła**

dr hab. inż. Agnieszka Gubernat, prof. AGH

[gubernat@agh.edu.pl](mailto:gubernat@agh.edu.pl)

p.1.14; budynek B8

# OPADANIE CZĄSTEK CIAŁ STAŁYCH W PŁYNACH

# PLAN WYKŁADÓW

1. Wprowadzenie, podstawowe zasady , podstawowe zasady technologii chemicznej, schemat procesowy
2. Termodynamika procesów, energia, ciepło
3. Źródła energii, spalanie i właściwości paliw, niekonwencjonalne źródła energii
4. Temperatura, zerowa i trzecia zasada termodynamiki, entropia, termodynamiczna definicja temperatury,
5. Termometria, pomiary temperatury,
6. Suszenie i suszarnie,
7. Przepływ ciepła, mechanizmy wymiany ciepła, stałe materiałowe,
8. Płyny, statyka, dynamika, równanie ciągłości strugi, prawo Bernoulliego,
9. Pomiary prędkości i natężenia przepływu,
10. Reologia, modele reologiczne, zawiesiny i pasty,
11. Opory przepływu, filtracja, opadanie cząstek w płynach, sedymentacja,
12. Homogenizacja zawiesin, ocena jednorodności,
13. Segregacja hydrauliczna, odpylanie i oczyszczanie gazów.
14. Rozdrabnianie ciał stałych, klasyfikacja ziarnowa, metodyka pomiaru rozkładu i wielkości ziaren,

# OPADANIE CZĄSTEK CIAŁ STAŁYCH W PŁYNACH

## UKŁAD NIEJEDNORODNY

- złożony jest z fazy rozpraszającej (gazowej lub ciekłej)  
i fazy rozproszonej stałej.

Rozdzielanie układów niejednorodnych prowadzi się w celu:

- ❖ oczyszczenia fazy płynnej
- ❖ i/lub wyodrębnienia fazy rozproszonej stałej.

# MIESZANIE

Celem mieszania jest:



- AGH
1. homogenizacja, otrzymanie jednorodnej emulsji lub zawiesiny,
  2. intensyfikacja wymiany ciepła lub masy (rozpuszczanie, otrzymanie jednorodnego stężenia układu),
  3. intensyfikacja przebiegu reakcji chemicznych w reaktorach,

Mieszaniu podlegają układy:

- gaz w cieczy
- ciecz w cieczy
- ciało stałe w cieczy
- ciało stałe w ciele stałym

Mieszanie prowadzi się w różnego rodzaju mieszadłach mechanicznych: *propelerowych (śmigłowych), turbinowych, kulowych i łopowych.*

Rzadziej stosuje się mieszanie pneumatyczne, wibracyjne i ultradźwiękowe.

# MIESZANIE

Moc mieszania

$$N = f(d, D, H, y, L, b, a, \rho_L, \eta_L, n, g)$$

gdzie:

$d$  - średnica mieszadła m,

$D$  - średnica mieszalnika m,

$H$  - wysokość słupa cieczy (mieszaniny) w mieszalniku m,

$y$  - odległość mieszadła od dna mieszalnika m,

$L$  - długość (wysokość) przegród m,

$B$  - szerokość łopatek m,

$A$  - szerokość przegród m,

$\rho_L$  - gęstość cieczy (mieszaniny)  $\text{kg/m}^3$ ,

$\eta_L$  - lepkość dynamiczna cieczy  $\text{Pa}\cdot\text{s}$ ,

$n$  - liczba obrotów mieszadła  $1/\text{s}$ ,

$g$  - przyspieszenie ziemskie  $\text{m/s}^2$ ,

Na podstawie analizy wymiarowej ustalono, że gdy  $Re_m < 10$  mieszanie ma charakter uwarstwiony, wówczas:

$$Re_m = \frac{nd^2\rho_L}{\eta_L}$$

$$N = Kd^3n^2\eta_L$$

# MIESZANIE

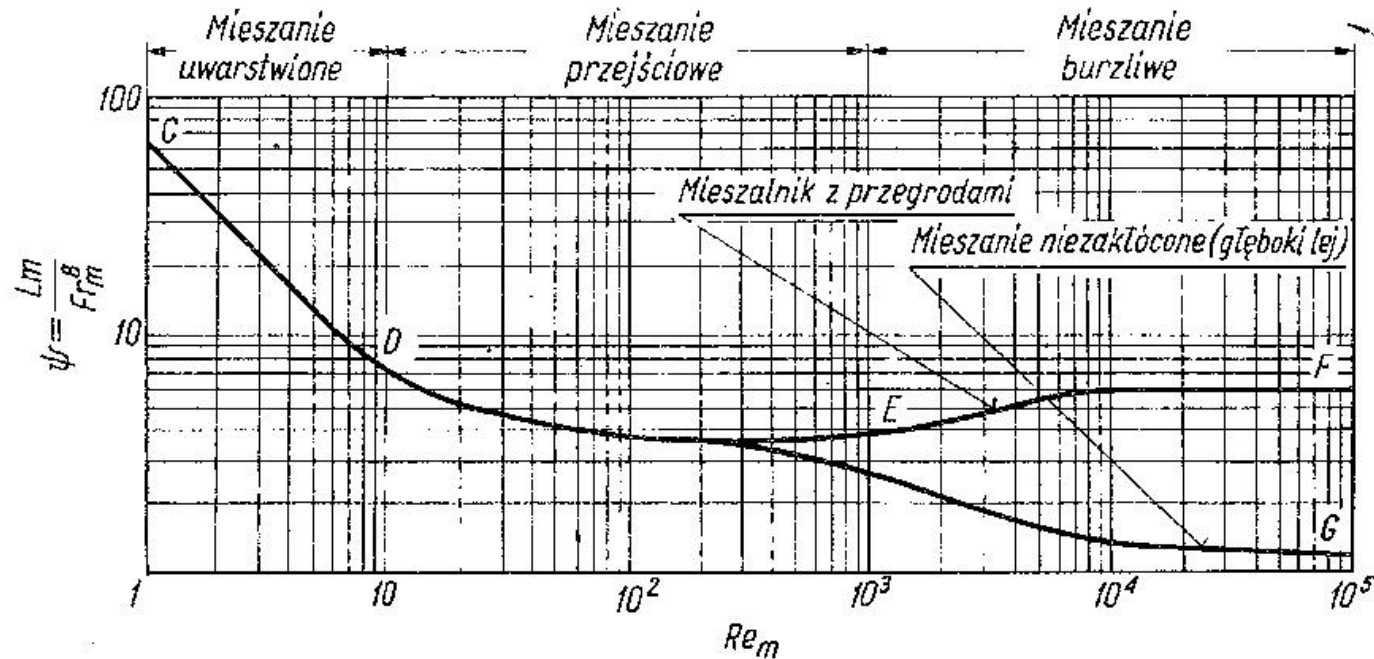


Podczas gdy  $10 < Re_m < 10^3$  mieszanie ma charakter przejściowy, wówczas:

$$N = K d^{5-2r} n^{3-r} \rho_L^{1-r} \eta_L^r$$

Natomiast gdy  $Re_m > 10^3$  mieszanie ma charakter burzliwy, wówczas:

$$N = K d^5 n^3 \rho_L$$





AGH

# JEDNORODNOŚĆ (HOMOGENICZNOŚĆ) UKŁADÓW MIESZANYCH

Jeżeli głównym celem mieszania jest otrzymanie jednorodnej zawiesiny to układ będzie uważany za jednorodny, gdy stężenie obu faz rozpraszającej i rozpraszanej będzie jednakowe w dowolnej próbce objętości pobranej z mieszanego układu.

$$c = \frac{b}{b_o} \cdot 100$$

gdzie:

*b* - stężenie fazy rozpraszanej w pobranej próbce w dowolnym miejscu układu w % masowych,

*b<sub>o</sub>* - średnie stężenie fazy rozpraszanej w układzie mieszanym w % masowych,

*c* - względne stężenie fazy rozpraszanej w układzie mieszanym w % masowych,

*s* - liczba prób,

Gdy  $b > b_o$  wtedy *c* wyznacza się z następującego wzoru:

$$c = \frac{100 - b}{100 - b_o} \cdot 100$$

Zatem na podstawie *s* pobranych prób stopień jednorodności układu oblicza się wg następującego wzoru:

$$I = \frac{c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_s}{s}$$

Wielkość *I* nazywana jest także indeksem mieszania. Im wartość *I* jest bliższa 100% tym układ jest bliższy jednorodności doskonałej.



# OPADANIE CZĄSTEK CIAŁ STAŁYCH W PŁYNACH

## OPORY W TRAKCIE RUCHU CZĄSTEK CIAŁ STAŁYCH W PŁYNACH

Ciała spadają swobodnie w powietrzu ruchem jednostajnie przyspieszonym.

W próżni po czasie  $\tau$  prędkość jest równa:

$$u = g \cdot \tau$$

Gdy spadające ciała są duże i prędkość spadania niewielka, opór ośrodka jest pomijany. Gdy natomiast ciała posiadają średnicę mniejszą bądź równą  $10^{-4}$  m opór ośrodka jest znaczący, tym większy im większa jest prędkość opadania. Opadające cząstki ciał stałych mogą być kuliste i niekuliste. W technologii ceramicznej bardzo często ma się do czynienia z cząstkami o w/w rozmiarach.

W celu prześledzenia mechanizmu opadania cząstki stałej w płynie należy założyć:

- 1) cząstka opadająca jest pojedyncza, nie wywierają na nią wpływu inne cząstki,
- 2) cząstka jest kulista o średnicy  $d$ ,

# OPORY W TRAKCIE RUCHU CZĄSTEK CIAŁ STAŁYCH W PŁYNACH

Ciśnienie jakie jest wywierane na opadającą cząstkę zależy od jej średnicy  $d$ , prędkości opadania  $u_o$ , gęstości ośrodka płynnego  $\rho_F$  i jego lepkości  $\eta_F$ .

$$\Delta P = f(d, u_o, \rho_F, \eta_F)$$

Postępując się analizą wymiarową, metodą Rayleigha można zapisać:

$$\Delta p = C d^a u_o^b \rho_F^c \eta_F^d$$

Odpowiadające ostatniej zależności równanie wymiarów fizycznych ma następującą postać:

$$\left[ \frac{N}{m^2} \right] = \left[ \frac{kg}{m \cdot s^2} \right] = [m]^a \left[ \frac{m}{s} \right]^b \left[ \frac{kg}{m^3} \right]^c \left[ \frac{kg}{m \cdot s} \right]^d$$

Aby wymiar fizyczny po prawej stronie równania był równy wymiarowi fizycznemu po lewej stronie równania muszą być spełnione warunki:

$$\text{dla } kg: 1 = c + d$$

$$\text{dla } m: -1 = a + b - 3c - d$$

$$\text{dla } s: -2 = -b - d$$

# OPORY W TRAKCIE RUCHU CZĄSTEK CIAŁ STAŁYCH W PŁYNACH

Wielkości  $a$ ,  $b$  i  $c$  wyrażane są za pomocą wielkości  $d$ , zatem:

$$a = -d$$

$$b = 2 - d$$

$$c = 1 - d$$

Uwzględniając to rozwiązanie można zapisać:

$$\Delta p = C d^{-d} u_0^{2-d} \rho_F^{1-d} \eta_F^d$$

Po podzieleniu obu stron równania przez  $\Delta p$  i zgrupowaniu wyrazów z jednakowymi wykładnikami potęg, można otrzymać:

$$1 = C \frac{\left(\frac{\eta_F}{u_0 d \rho_F}\right)^d}{\left(\frac{\Delta p}{\rho_F u_0^2}\right)} \rightarrow \frac{\Delta p}{\rho_F u_0^2} = C \left(\frac{\eta_F}{u_0 d \rho_F}\right)^d \rightarrow Eu = C \cdot Re^B$$

# OPORY W TRAKCIE RUCHU CZĄSTEK CIAŁ STAŁYCH W PŁYNACH

Wykładnik potęgi  $B$  jest równy -  $d$ . Ciśnienie wywierane przez ośrodek na opadającą cząstkę traktować można jako stosunek siły oporu ośrodka  $R$  do powierzchni rzutu cząstki  $A$  na płaszczyznę prostopadłą do kierunku opadania. Z równań powyższych otrzymujemy zatem:

$$\Delta p = \frac{R}{A} = C Re^B u_0^2 \rho_F = 2C Re^B \frac{u_0^2}{2} \rho_F$$

lub w postaci końcowej:

$$R = \lambda A \frac{u_o^2}{2} \rho_F$$

gdzie współczynnik oporu ośrodka  $\lambda$  jest funkcją liczby Reynoldsa

$$\lambda = f(\text{Re})$$

Siła oporu ośrodka zależy od energii kinetycznej opadającej cząstki, gęstości ośrodka oraz charakteru ruchu cząstki kulistej.

# LICZBA REYNOLDSA OPADANIA

$$Re = \frac{u_0 d \rho_F}{\eta_F}$$

gdzie:

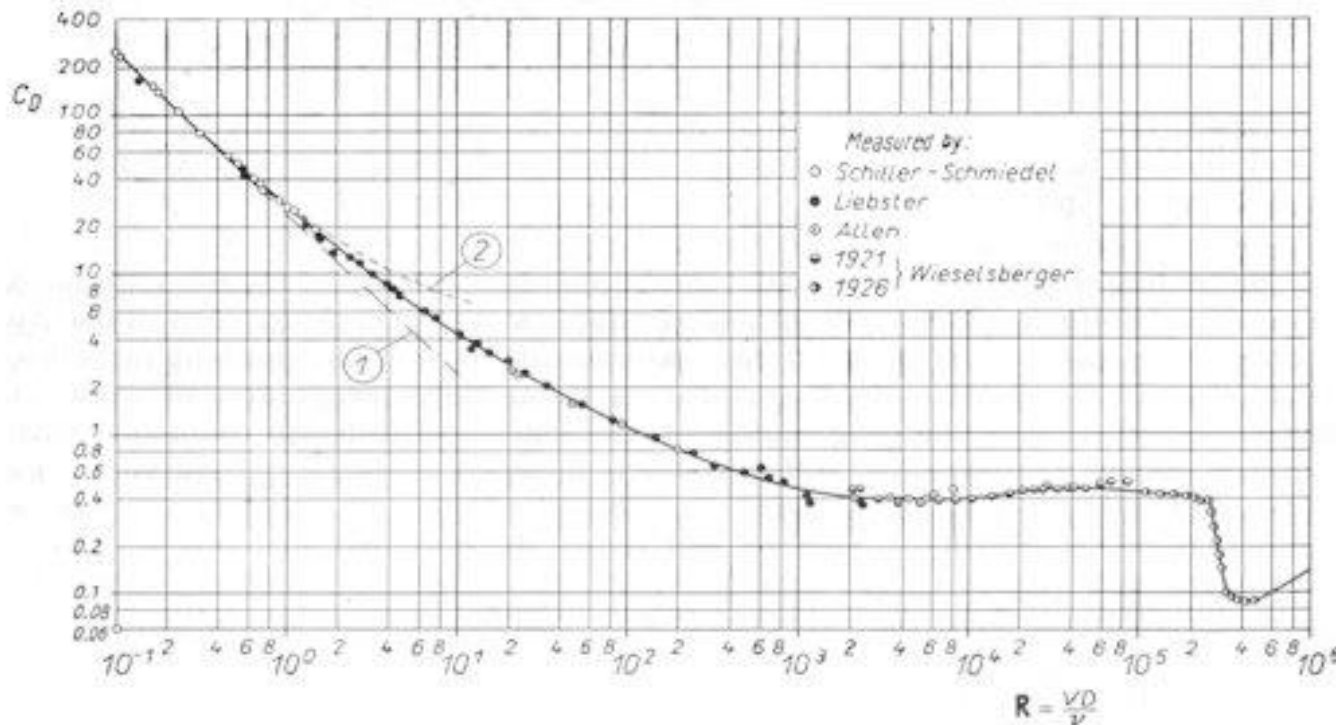
$u_0$  - prędkość opadania cząstki [m/s],

$d$  - średnica cząstki [m],

$\rho_F$  - gęstość ośrodka płynnego [kg/m<sup>3</sup>],

$\eta_F$  - lepkość dynamiczna ośrodka płynnego [Pa·s]

## ZALEŻNOŚĆ WARTOŚCI WSPÓŁCZYNNIKA OPORU OŚRODKA $\lambda$ OD LICZBY REYNOLDSA



Zależność współczynnika oporu ośrodka  $\lambda$  od liczby Reynoldsa wyznaczono doświadczalnie, gdy:

## 1. Liczba Reynoldsa zawiera się w granicach od $10^{-4}$ do 0,4 (2),

jest to ruch uwarstwiony cząstki w płynie, wówczas współczynnik oporu można przedstawić w postaci zależności

$$\lambda = \frac{24}{\text{Re}}$$

Podstawiając tę zależność do równania na siłę oporu ośrodka otrzymać można:

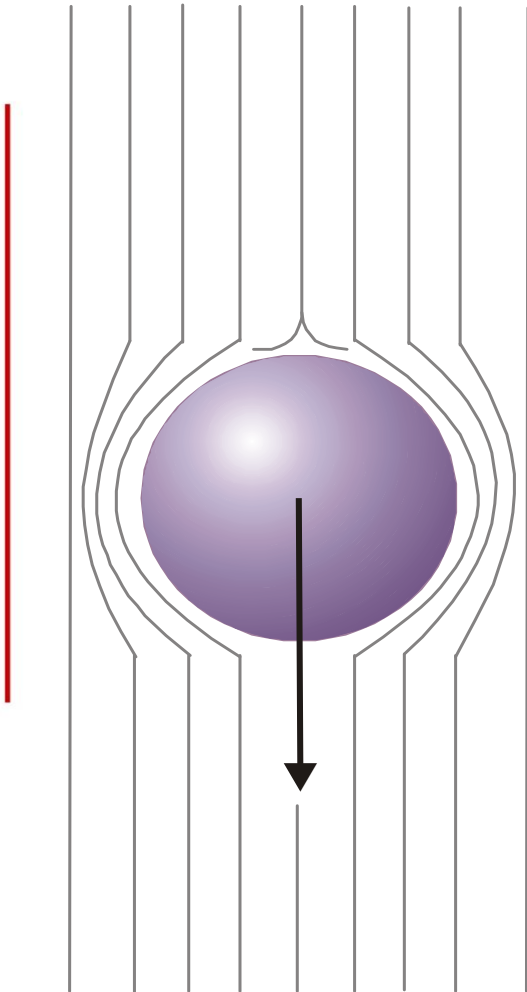
$$R = \lambda A \frac{u_0^2}{2} \rho_F = \frac{24}{\text{Re}} A \frac{u_0^2}{2} \rho_F = \frac{24 \eta_F}{u_0 d \rho_F} \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{u_0^2}{2} \cdot \rho_F$$

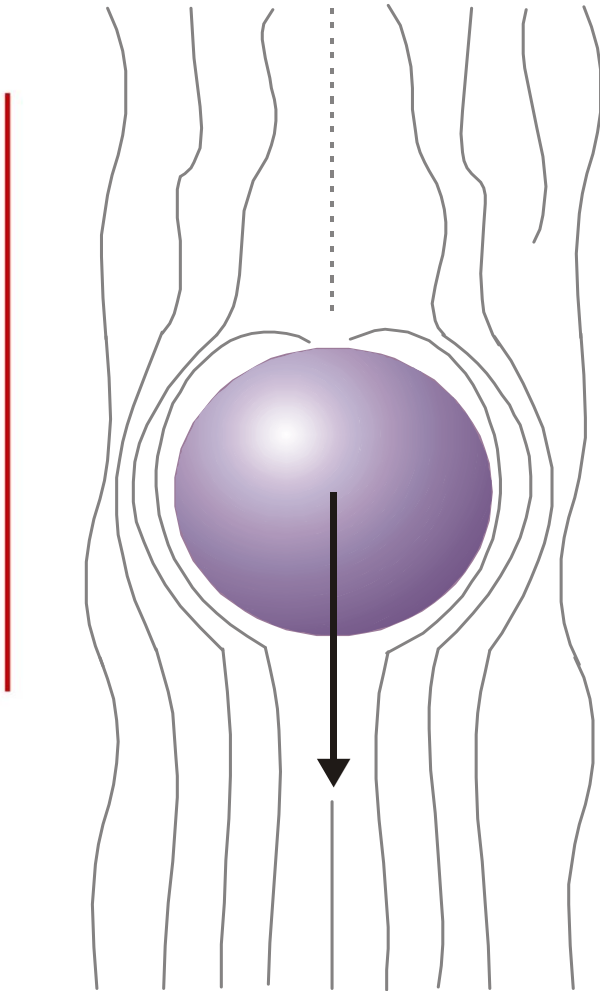
zatem siła oporu ośrodka wynosi

$$R = 3\pi d \eta_F u_o$$

**równanie Stokesa**

Z równania tego wynika, że siła oporu ośrodka jest wprost proporcjonalna do lepkości ośrodka, średnicy cząstki i prędkości opadania.





2. W zakresie **liczby Reynoldsa od 0,4 do 10<sup>3</sup>** współczynnik  $\lambda$  określony jest funkcją

$$\lambda = \frac{18,5}{\text{Re}^{0,6}}$$

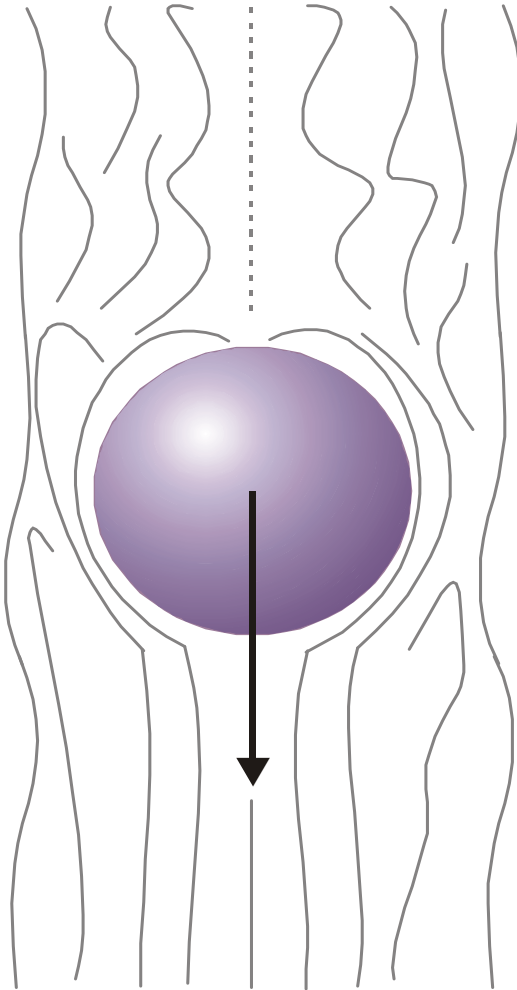
natomiast siła oporu ośrodka

$$R = 2,3d^{1,4}\eta_F^{0,6}u_o\rho_F^{0,4}$$

**równanie Allena**

$$( R = 7,26d^{1,4}\eta_F^{0,6}u_o^{1,4}\rho_F^{0,4} )$$

Siła oporu ośrodka zależy od gęstości i lepkości płynu.



3. Dla ruchu burzliwego gdy  $10^3 < Re < 2 \cdot 10^5$  współczynnik oporu ośrodka  $\lambda$  jest wielkością stałą i wynosi 0,44.

Zatem siła oporu ośrodka jest równa

$$R = 0,44 A \frac{u_o^2}{2} \rho_F$$

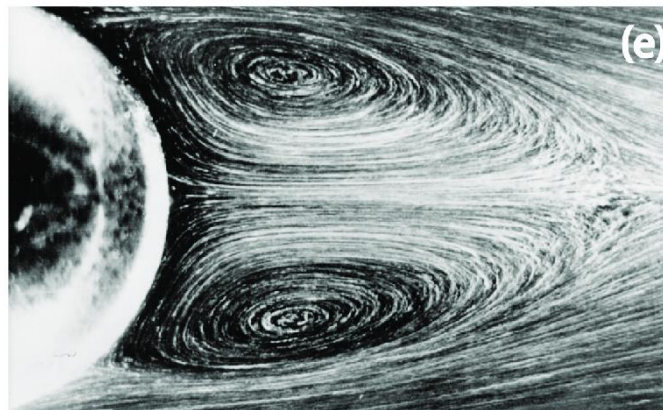
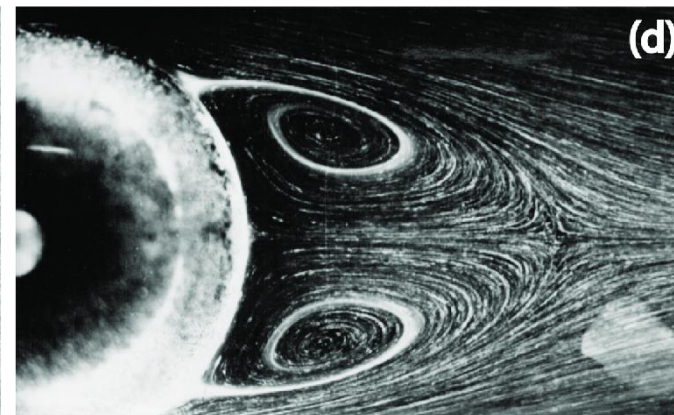
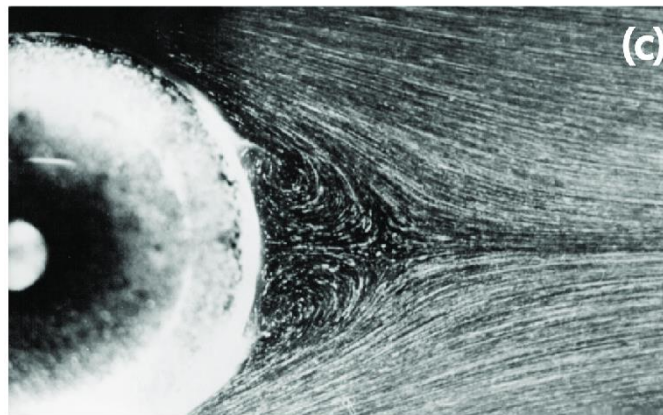
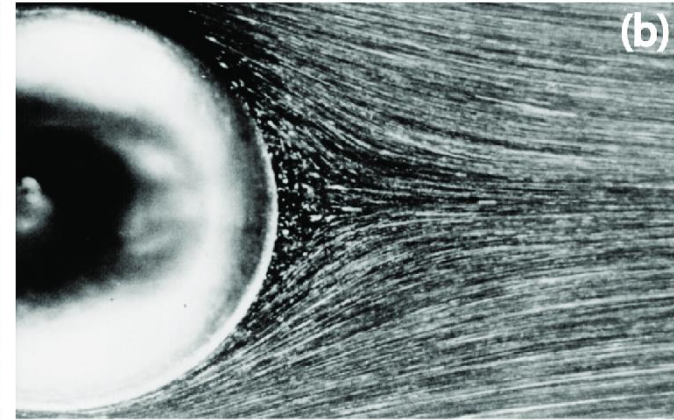
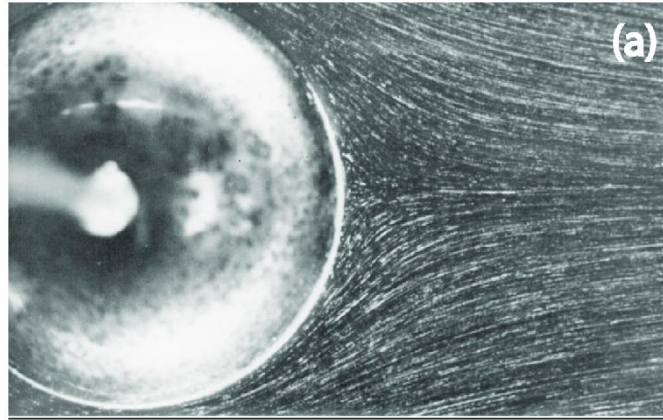
równanie Newtona

Siła oporu ośrodka zależy od kwadratu średnicy cząstki opadającej, od jej energii kinetycznej i od gęstości ośrodka płynnego.

**Dla cząstek niekulistych zamiast średnicy wprowadza się pojęcie średnicy zastępczej  $d_e$ .**



# LICZBA REYNOLDSA OPADANIA





AGH

# CZĄSTKI IZOMETRYCZNE (NIEKULISTE)

$$\lambda = f(\text{Re}, \psi)$$

gdzie:

$\psi$  współczynnik kształtu, sferyczność cząstki równa jest stosunkowi powierzchni kuli o tej samej objętości co ziarno do powierzchni ziarna,

1. Gdy  **$\text{Re} < 0,05$**  wówczas cząstki izometryczne opadają w płynie ruchem laminarnym wtedy

$$\lambda = \frac{\alpha}{\text{Re}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{24}{0,8431g \frac{\psi}{0,065}}$$

2. Gdy  **$0,05 < \text{Re} < 2 \cdot 10^3$**  wówczas cząstki opadają w płynie ruchem przejściowym współczynnik oporu  $\lambda$  odczytuje się z tablic lub wykresów dla odpowiedniej liczby Reynoldsa i sferyczności cząstek niekulistych

3. Gdy  $\text{Re}$  zawiera się w granicach od  **$2 \cdot 10^3$  do  $2 \cdot 10^5$**  wówczas cząstki opadają w płynie ruchem burzliwym wtedy

$$\lambda = 5,31 - 4,87\psi$$

# OPADANIE GRAWITACYJNE NIEZAKŁÓCONE

Cząstka opada gdy prędkość opadania jest stała i wynosi  $u_o$ . Ciężar cząstki  $F$  o średnicy  $d$  i gęstości  $\rho_S$  w ośrodku o gęstości  $\rho_F$  przy uwzględnieniu zasady Archimedesesa wynosi:

$$F = \frac{\pi d^3}{6} (\rho_S - \rho_F) g$$

Stałość prędkości opadania zachodzi w przypadku równości sił ciężkości i oporu ośrodka. Po porównaniu odpowiednich równań prędkość opadania jest równa:

$$u_o = \sqrt{\frac{4dg(\rho_S - \rho_F)}{3\lambda\rho_F}}$$

Aby wyznaczyć prędkość opadania należy znać wartość współczynnika oporu ośrodka  $\lambda$ , który jak wiadomo jest funkcją liczby Reynoldsa czyli zależy od rodzaju ruchu z jakim porusza się opadająca cząstka. Z kolei wartość liczby Reynoldsa jest zależna od prędkości opadania  $u_o$ . Zatem bezpośrednio wykorzystanie powyższego równania jest niemożliwe.

Aby wyznaczyć prędkość opadania  $u_0$  z ogólnego równania na prędkość opadania wyznacza się współczynnik  $\lambda$ , który jest równy:

$$\lambda = \frac{4dg(\rho_S - \rho_F)}{3u_0^2\rho_F}$$

Mnożąc obie strony równania przez  $Re^2$  można wyeliminować nieznaną prędkość  $u_0$ .

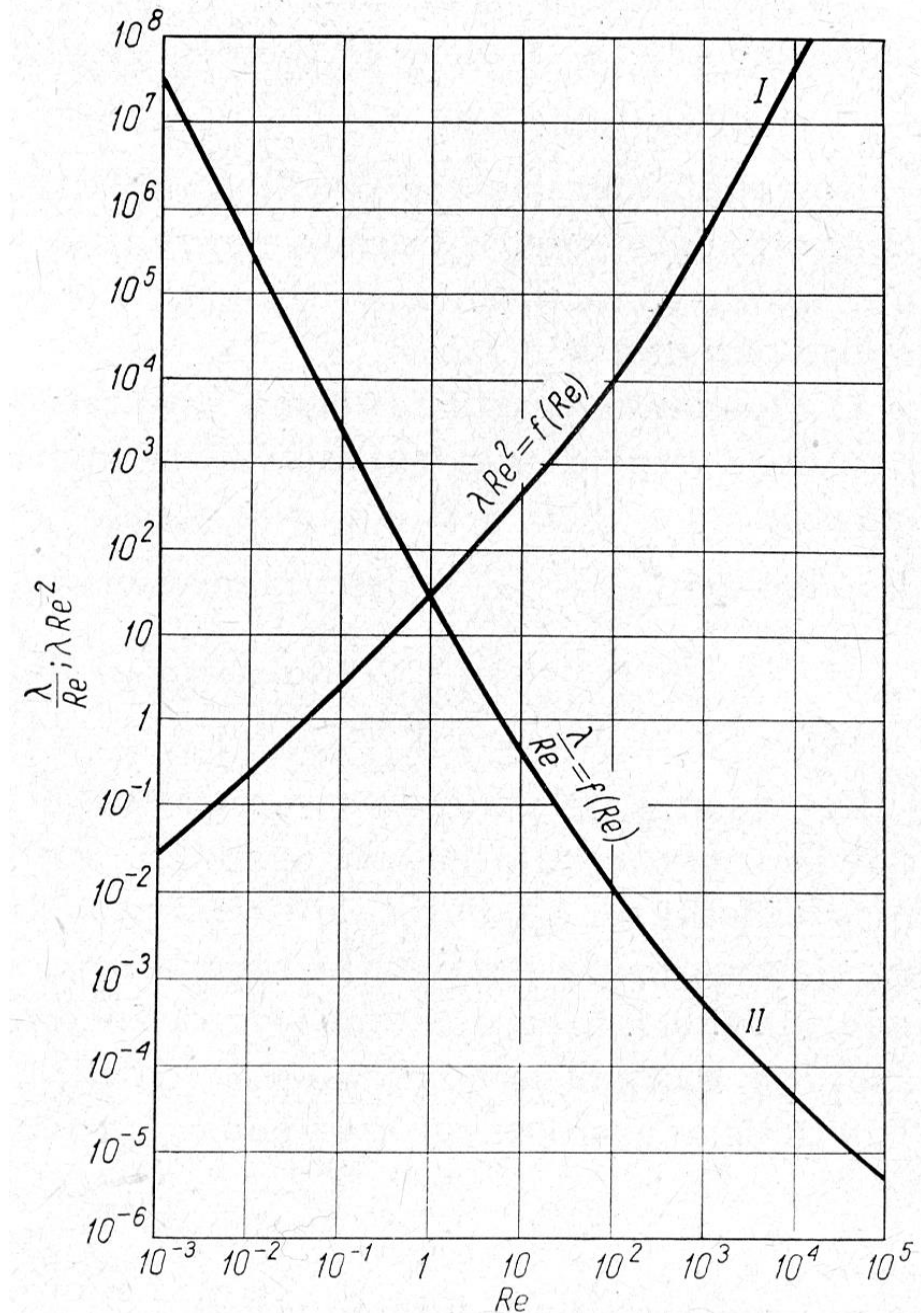
$$\lambda Re^2 = \frac{4dg(\rho_S - \rho_F)}{3u_0^2\rho_F} \cdot \left(\frac{u_0 d\rho_F}{\eta_F}\right)^2 \quad \text{stąd} \quad \lambda Re^2 = \frac{4d^3g(\rho_S - \rho_F)\rho_F}{3\eta_F^2}$$

Wszystkie wielkości po prawej stronie równania są znane zatem można wyznaczyć  $u_0$ . W tym celu oblicza się  $\lambda Re^2$  a następnie korzysta z wykresu zależności  $\lambda Re^2=f(Re)$  i odczytuje wartość  $Re_1$  dzięki której można wyznaczyć wartość  $u_0$ .

Podobnie można wyznaczyć średnicę cząstek  $d$  opadających w ośrodku o znanej gęstości i lepkości dynamicznej z prędkością opadania  $u_0$ . W tym celu w równaniu na współczynnik  $\lambda$ , obie strony dzieli się przez  $Re$ .

$$\frac{\lambda}{Re} = \frac{4dg(\rho_S - \rho_F)}{3u_0^2\rho_F} \cdot \left(\frac{\eta_F}{u_0 d\rho_F}\right) \quad \text{stąd} \quad \frac{\lambda}{Re} = \frac{4g(\rho_S - \rho_F)\eta_F}{3u_0^3\rho_F^2}$$

Na podstawie danych wyjściowych wyznacza się wartość prawej strony równania. Następnie posługując się wykresem  $\lambda=f(Re)$  sporządza się wykres pochodny  $\lambda/Re=f(Re)$ . Następnie na osi rzędnych odkłada się wyznaczoną wartość  $\lambda_1/Re_1$  i odczytuje szukaną wartość liczby Reynoldsa  $Re_1$ , która jest charakterystyczna dla znanej prędkości  $u_0$ . Dzięki znajomości obu wartości można wyznaczyć szukaną wartość średnicy  $d$ .



# CZĄSTKI KULISTE

## 1. OPADANIE CZĄSTKI RUCHEM UWARSTWIONYM

$$u_o = \frac{d^2 (\rho_S - \rho_F) g}{18 \eta_F}$$

$$d \leq 1,93 \sqrt[3]{\frac{\eta_F^2}{(\rho_S - \rho_F) \rho_F g}} \quad \text{założenia: } Re \leq 0,4 \text{ i } \lambda = 24/Re$$

## 2. OPADANIE CZĄSTKI RUCHEM PRZEJŚCIOWYM

$$u_o = \frac{0,153 \cdot d^{1,14} \cdot g^{0,71} (\rho_S - \rho_F)^{0,71}}{\rho_F^{0,28} \cdot \eta_F^{0,43}}$$

$$1,93 \sqrt[3]{\frac{\eta_F^2}{(\rho_S - \rho_F) \rho_F g}} \leq d \leq 69 \sqrt[3]{\frac{\eta_F^2}{(\rho_S - \rho_F) \rho_F g}} \quad \text{założenia: } 0,4 \leq Re \leq 1000 \text{ i } \lambda = 18,5/Re^{0,6}$$

## 3. OPADANIE CZĄSTEK RUCHEM BURZLIWYM

$$u_o = 1,74 \sqrt{\frac{dg(\rho_S - \rho_F)}{\rho_F}}$$

$$d \geq 69 \sqrt[3]{\frac{\eta_F^2}{g(\rho_S - \rho_F) \rho_F}} \quad \text{założenia: } Re \geq 1000 \text{ i } \lambda = 0,44$$

# CZĄSTKI NIEKULISTE - IZOMETRYCZNE

## 1. OPADANIE CZĄSTKI RUCHEM UWARSTWIONYM

$$u_o = \frac{K_S d_e^2 (\rho_S - \rho_F) g}{18 \eta_F} \quad d_e \leq \left( \frac{0,9}{K_S} \right)^{1/3} \cdot \sqrt[3]{\frac{\eta_F^2}{(\rho_S - \rho_F) \rho_F g}}$$

gdzie:

$$K_S = 0,8431g \frac{\psi}{0,065}$$

$\psi$  - sferyczność cząstek, równa stosunkowi powierzchni kuli o tej samej objętości co ziarno do powierzchni ziarna,

## 2. OPADANIE CZĄSTKI RUCHEM PRZEJŚCIOWYM

$$\left( \frac{0,9}{K_S} \right)^{1/3} \cdot \sqrt[3]{\frac{\eta_F^2}{(\rho_S - \rho_F) \rho_F g}} \leq d_e \leq \frac{158,5}{K_N^{2/3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{\eta_F^2}{(\rho_S - \rho_F) \rho_F g}}$$

## 3. OPADANIE CZĄSTEK RUCHEM BURZLIWYM

$$u_o \cong K_N \cdot \sqrt{\frac{d_e g (\rho_S - \rho_F)}{\rho_F}} \quad d_e \geq \frac{158,3}{K_N^{2/3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{\eta_F^2}{g (\rho_S - \rho_F) \rho_F}}$$

gdzie:  $K_N = \sqrt{\frac{4}{3 \cdot (5,31 - 4,87\psi)}}$

# ZASADY KLASYFIKACJI HYDRAULICZNEJ



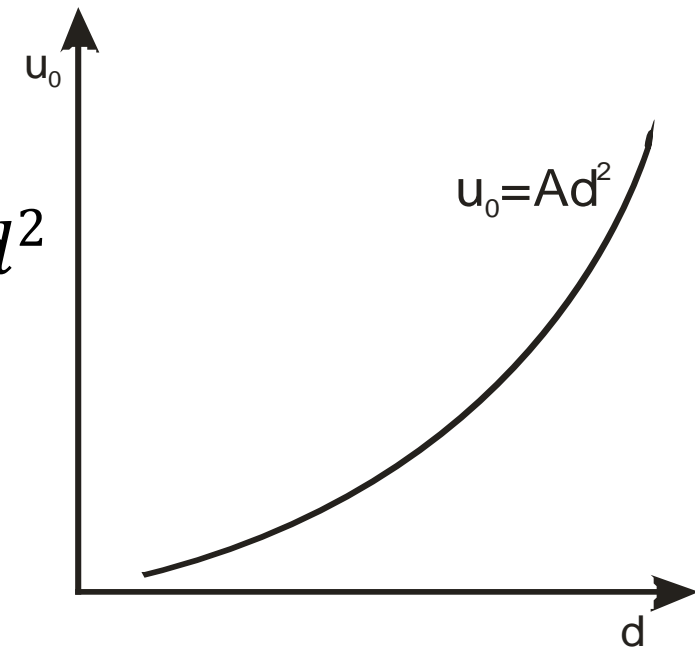
AGH

Jest to metoda rozdzielania mieszanin cząstek stałych o różnej wielkości i różnej gęstości. W tym celu wykorzystuje się różnice w prędkości opadania różnych ziaren w środowisku płynnym. Zależność prędkości opadania od średnicy cząstki lub zastępczej średnicy cząstki i jej sferyczności może być ujęta następującymi zależnościami:

## DLA RUCHU UWASTWIONEGO

cząstki kuliste  $u_0 = \frac{d^2 (\rho_S - \rho_F) g}{18\eta_F} = A_1 d^2$

cząstki izometryczne  $A_1 = \frac{K_S (\rho_S - \rho_F) g}{18\eta_F}$



Z równań wynika, że obrazem graficznym funkcji jest parabola o pionowej osi symetrii.

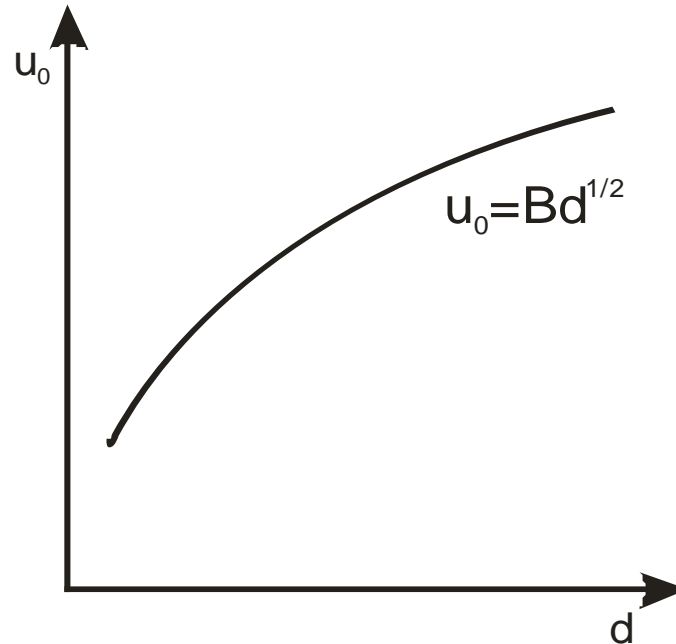


## DLA RUCHU BURZLIWEGO

cząstki kuliste  $u_0 = 1,74 \sqrt{\frac{d(\rho_S - \rho_F)g}{\rho_F}} = B_1 \sqrt{d}$

cząstki izometryczne  $B_1 = K_S \sqrt{\frac{(\rho_S - \rho_F)g}{\rho_F}}$

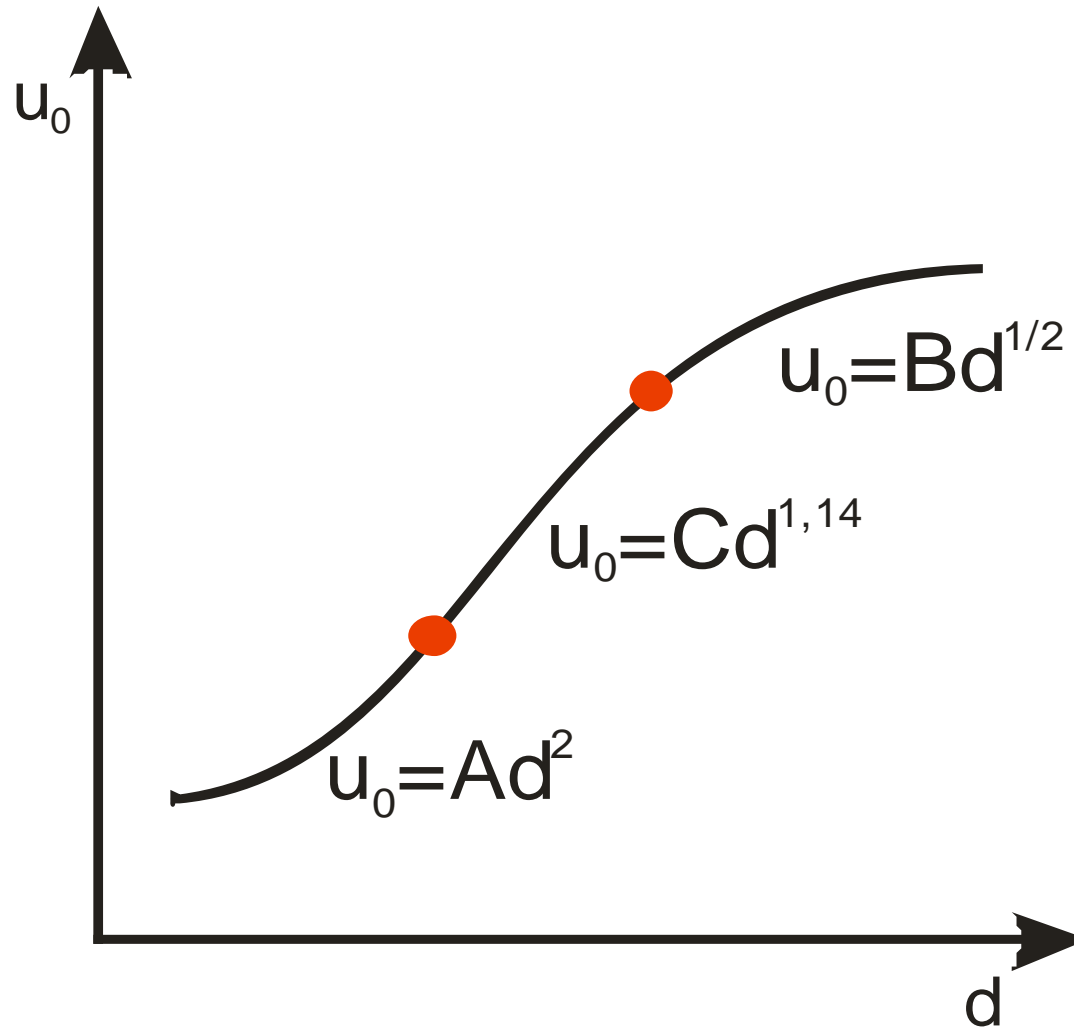
Z równań wynika, że obrazem graficznym funkcji  
**jest parabola o poziomej osi symetrii.**



## DLA RUCHU PRZEJŚCIOWEGO

Ustalono zależność:  $u_0 = C_1 \cdot d^{1,14}$

Interpretacją graficzną tej funkcji jest linia zbliżona do prostej.

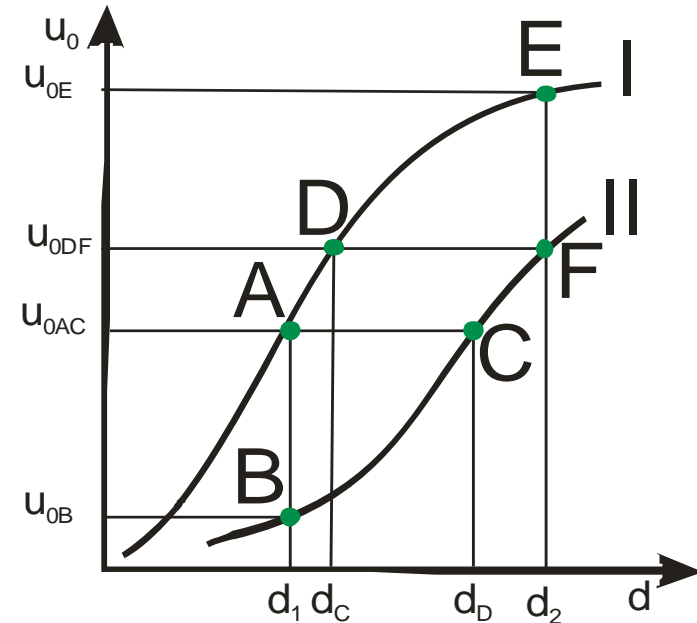
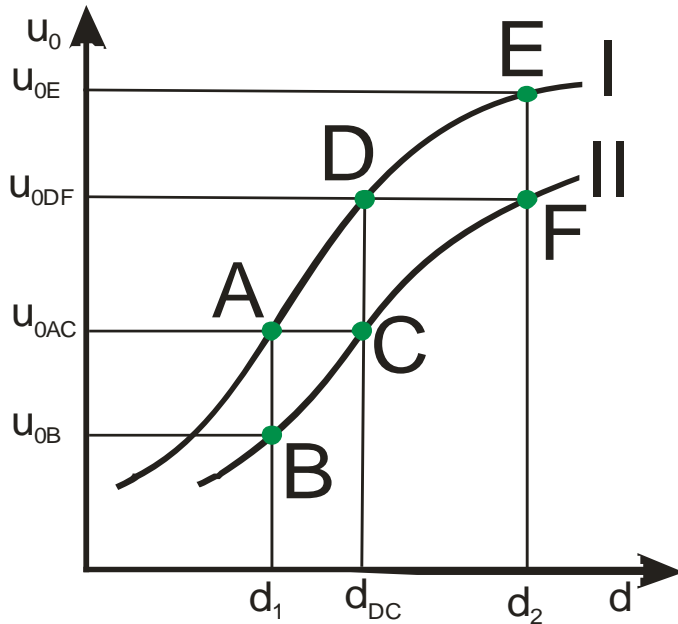
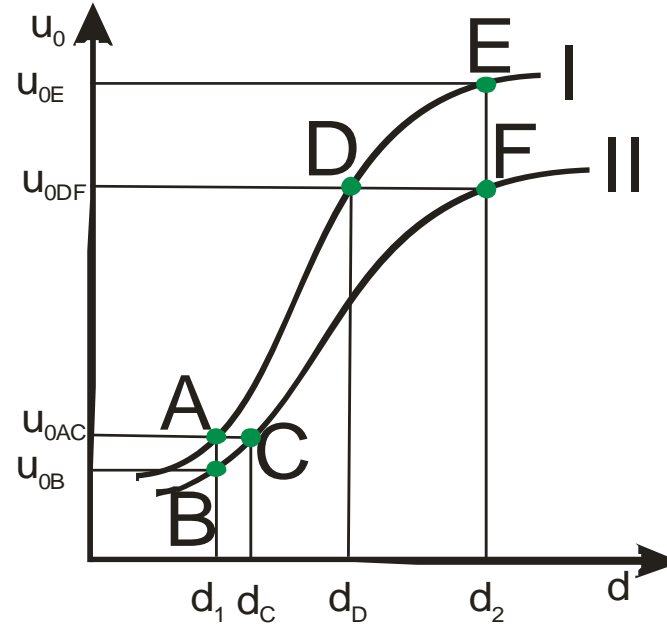


# METODA GRAFICZNA



Rozważmy dwie frakcje ziarnowe o gęstościach  $\rho_{S1}$  i  $\rho_{S2}$ . Średnice ziaren obu frakcji zawierają się w granicach od  $d_1$  do  $d_2$ .

$$\rho_{S1} > \rho_{S2}$$



# METODA RACHUNKOWA



Rozważmy dwie frakcje ziarnowe o gęstościach  $\rho_{S1}$  i  $\rho_{S2}$ . Szukamy stosunku prędkości dwóch ziaren o tej samej średnicy, w ruchu burzliwym.

$$u_{01} = K_{N1} \sqrt{\frac{d_e (\rho_{S1} - \rho_F) g}{\rho_F}} \quad i \quad u_{02} = K_{N2} \sqrt{\frac{d_e (\rho_{S2} - \rho_F) g}{\rho_F}}$$

dzieląc równania stronami można otrzymać:

$$\frac{u_{01}}{u_{02}} = \frac{K_{N1}}{K_{N2}} \sqrt{\frac{(\rho_{S1} - \rho_F)}{(\rho_{S2} - \rho_F)}}$$

Jeśli ziarna miałyby zbliżony kształt ( $\psi_1 = \psi_2$ ) to  $K_{N1} = K_{N2}$ , zatem:

$$\frac{u_{01}}{u_{02}} = \sqrt{\frac{(\rho_{S1} - \rho_F)}{(\rho_{S2} - \rho_F)}} \quad lub \quad u_{01} = u_{02} \sqrt{\frac{(\rho_{S1} - \rho_F)}{(\rho_{S2} - \rho_F)}}$$

Następnie szukamy średnic dwu ziaren opadających z tą samą prędkością

$$u_{01}/u_{02}=1:$$

$$K_{N1} \sqrt{\frac{d_{e1} (\rho_{S1} - \rho_F) g}{\rho_F}} = K_{N2} \sqrt{\frac{d_{e2} (\rho_{S2} - \rho_F) g}{\rho_F}}$$

$$\frac{d_{e1}}{d_{e2}} = \left( \frac{K_{N1}}{K_{N2}} \right)^2 \frac{(\rho_{S1} - \rho_F)}{(\rho_{S2} - \rho_F)}$$

gdy  $K_{N1} = K_{N2}$  wtedy:

$$\frac{d_{e1}}{d_{e2}} = \frac{(\rho_{S1} - \rho_F)}{(\rho_{S2} - \rho_F)} \quad \text{lub} \quad d_{e1} = d_{e2} \frac{(\rho_{S1} - \rho_F)}{(\rho_{S2} - \rho_F)}$$

Podobne rozważania można przeprowadzić dla **ruchu laminarnego**.

Dla **uwarstwionego opadania** dwu ziaren o tej samej średnicy ale różnej gęstości można zapisać:

$$\frac{u_{01}}{u_{02}} = \frac{K_{N1}}{K_{N2}} \cdot \frac{(\rho_{S1} - \rho_F)}{(\rho_{S2} - \rho_F)}$$

gdy  $K_{N1} = K_{N2}$  wtedy:

$$\frac{u_{01}}{u_{02}} = \frac{(\rho_{S1} - \rho_F)}{(\rho_{S2} - \rho_F)}$$

Jeżeli cząstki o różnych średnicach opadają z tą samą prędkością  
wówczas:

$$u_{01} = u_{02} = 1$$

$$\frac{d_{e1}}{d_{e2}} = \left( \frac{K_{N1}}{K_{N2}} \right)^{1/2} \cdot \sqrt{\frac{(\rho_{S1} - \rho_F)}{(\rho_{S2} - \rho_F)}}$$

gdy  $K_{N1} = K_{N2}$  wówczas:

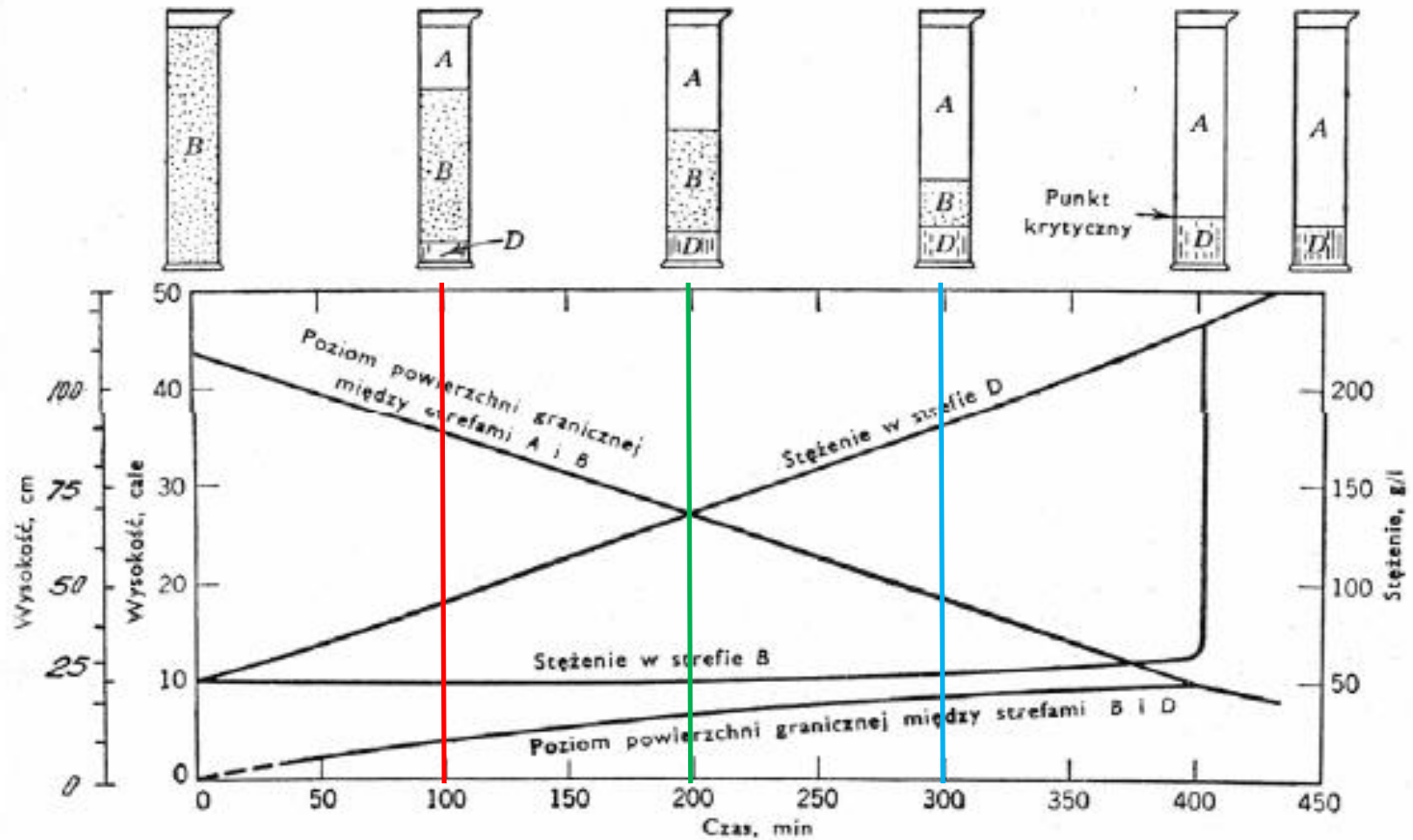
$$d_{e1} = d_{e2} \sqrt{\frac{(\rho_{S1} - \rho_F)}{(\rho_{S2} - \rho_F)}}$$

## ROZDZIELANIE ZAWIESIN

Ciekłe mieszaniny niejednorodne możemy rozdzielać poprzez:

1. **FILTRACJĘ** - oddzielanie ciał stałych od cieczy po przepuszczeniu mieszaniny przez przegrodę porowatą (filtr),
2. **WIROWANIE** - rozdzielanie z wykorzystaniem różnicy gęstości faz i siły odśrodkowej,
3. **SEDYMENTACJĘ** - opadanie cząstek ciała stałego w cieczy pod wpływem sił ciężkości i różnicy gęstości faz,
4. **DEKANTACJĘ** - zlewanie cieczy znad osadu który pod wpływem sił grawitacji opadł na dno,
5. **DESATURACJĘ** - wydzielanie gazu z cieczy pod wpływem zmian temperatury.

# SEDYMENTACJA



Rozdzielanie zawiesiny na dwie warstwy:

- czystego płynu - warstwa górna A,
- gęstego szlamu - warstwa dolna D.



# SEDYMENTACJA

## Metoda rozdzielania zawiesin



Wraz z prędkością opadania wielu cząstek przesuwa się granica podziału między klarowną cieczą i zawiesiną.

Możliwe jest obliczenie prędkości opadania z zależności:

**siła działająca na opadającą cząstkę = siła grawitacji - siła wyporu - siła oporu ośrodka**

Dla ruchu uwarstwionego prędkość opadania wyraża się wzorem:

$$u_o = \frac{d^2(\rho_S - \rho_F)g}{18\eta_F}$$

W rzeczywistości prędkość opadania jest mniejsza i prędkość należy pomnożyć przez współczynnik poprawkowy zależny od właściwości i stężenia sedymentującej zawiesiny.

$$u = \sqrt{\frac{2V(\rho_S - \rho_F) \cdot g}{\varphi \cdot \rho_F \cdot S_p}}$$

gdzie:

$V$  - objętość cząstki [ $m^3$ ],

$S_p$  - pole rzutu opadającej cząstki na płaszczyznę prostopadłą do kierunku jej ruchu [ $m^2$ ],

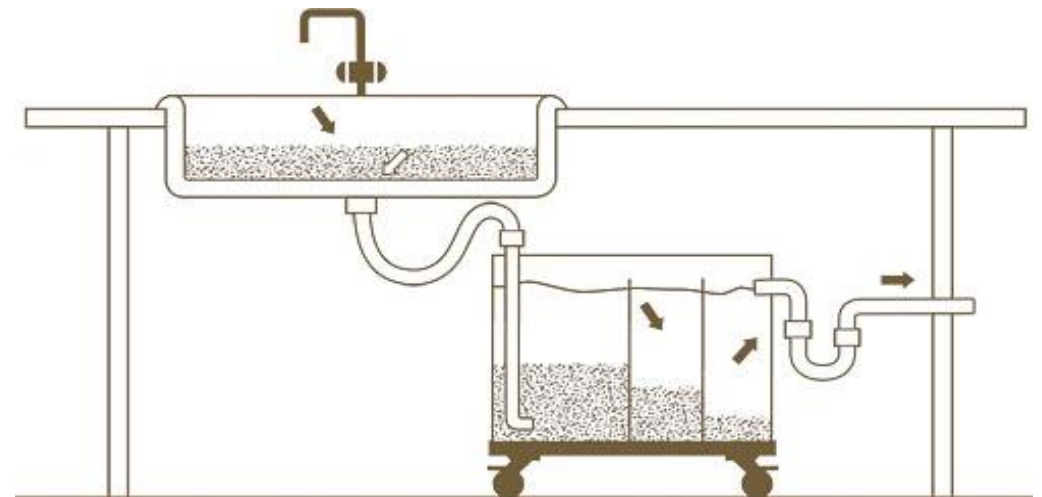
$\lambda$  - współczynnik oporu,

Opór ośrodka zależy nie tylko od parametrów wchodzących w skład równania Stokesa ale i od porowatości zawiesiny. Siłą napędową sedimentacji jest ciężar cząstek (jest to opadanie pod wpływem siły ciężkości).

W wyniku sedimentacji powstają dwa rodzaje osadów:

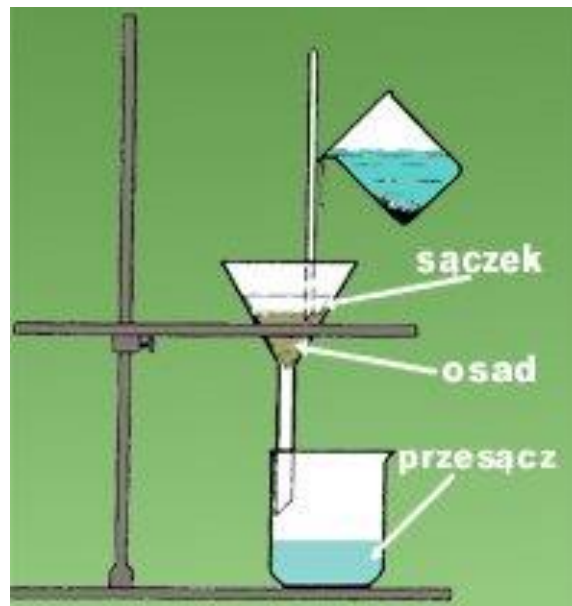
1. osady o wyraźnej granicy między cieczą a osadem (osady o dużych ziarnach),
2. osady gdzie nie ma wyraźnej granicy między cieczą a osadem (osady o drobnych ziarnach), przy dnie stwierdza się zagęszczenie ciała stałego,

Urządzenia, w których prowadzi się sedimentację to **odstojniki**.



# FILTRACJA

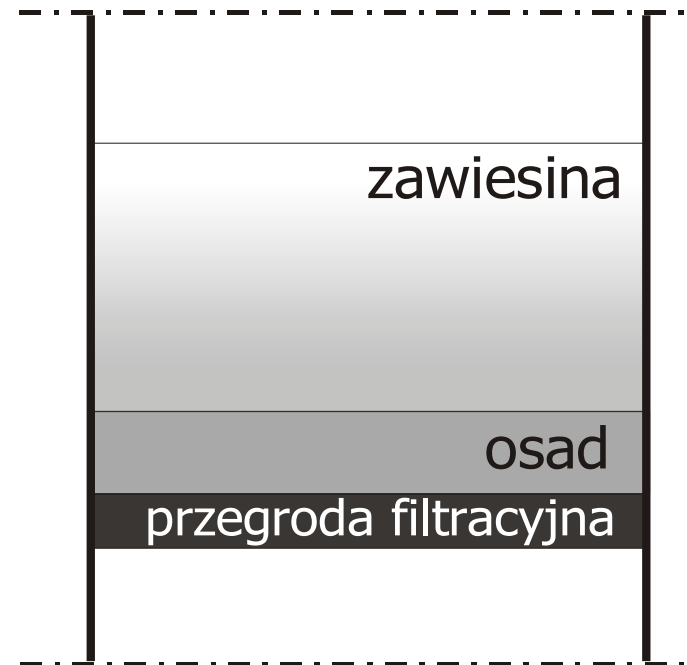
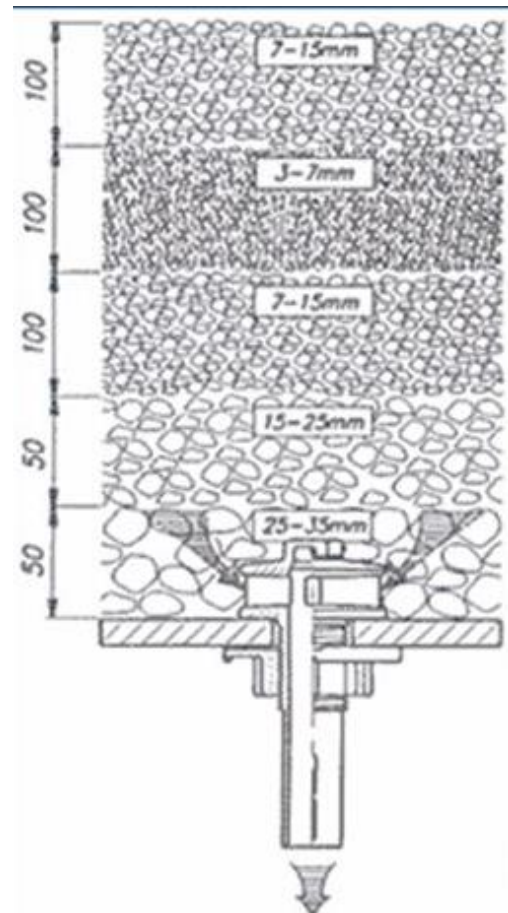
Polega na rozdzieleniu składników mieszaniny cieczy lub gazu z zawieszonymi cząstkami ciał stałych za pomocą urządzeń posiadających przegrodę przepuszczalną dla płynów a nieprzepuszczalną dla ciała stałego. Ciało stałe jest zatrzymywane na przegrodzie filtracyjnej (**filtrze**), podczas gdy ciecz (**przesącz, filtrat**) jest przez tą przegrodę przepuszczana. Przegroda filtracyjna może mieć strukturę ziarnistą (piasek) lub włóknistą (tkaniny, azbest). Ciecz przepływająca przez warstwę osadu i przegrodę filtracyjną napotyka na opór, który musi pokonać. W zależności od wielkości tego oporu stosuje się różne typy filtrów i różne warunki filtracji.



# FILTRACJA

## Opory przepływu niewielkie

- wykorzystuje się ciśnienie hydrostatyczne słupa cieczy nad warstwą osadu,
- urządzenia: **filtr grawitacyjny**, którego siłą napędową jest ciśnienie słupa surówki filtracyjnej nad przegrodą filtracyjną,





AGH

## Większe opory przepływu wykorzystuje się ciśnienie

• filtry próżniowe (nucze, próżniowe filtry obrotowe). W tego typu filtrach przesącz wypływa do przestrzeni o ciśnieniu niższym niż atmosferyczne,

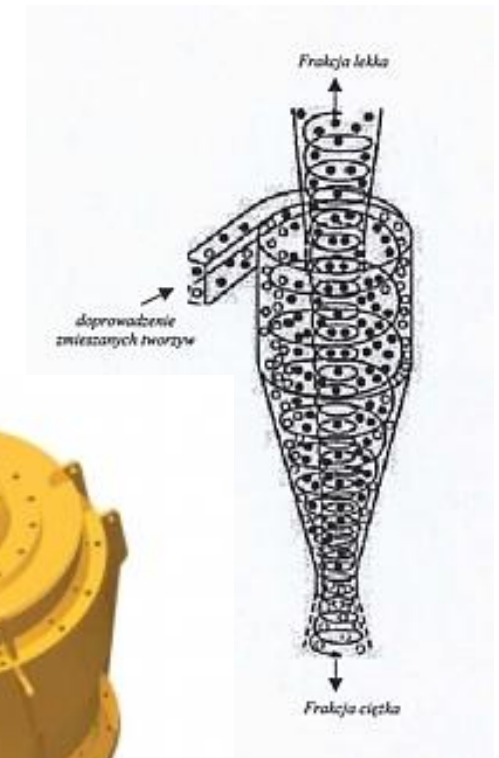
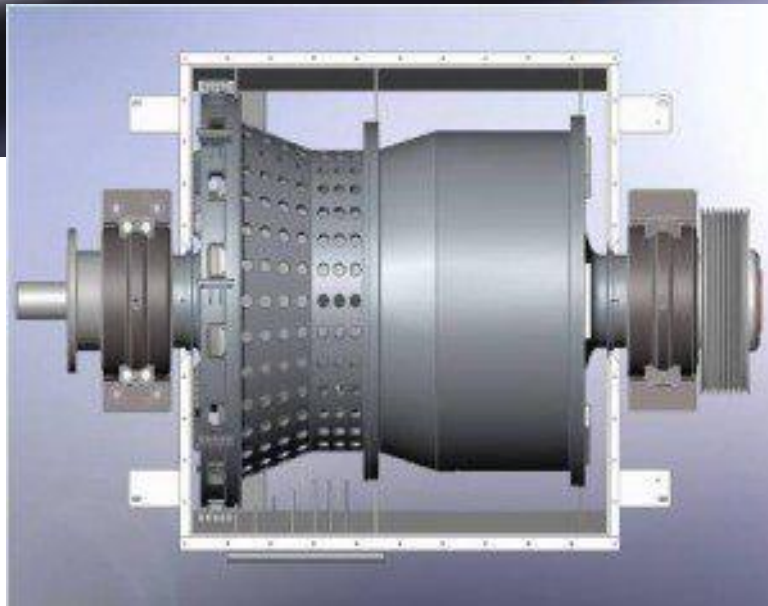


• filtry ciśnieniowe (prasy filtracyjne). W tego typu filtrach surówka filtracyjna wprowadzana jest do filtru pod ciśnieniem wyższym niż atmosferyczne,



## Większe opory przepływu wykorzystuje się siłę odśrodkową

- wirówki lub hydrocyklony. Siłą napędową procesu filtracji w tego typu urządzeniach jest siła odśrodkowa.



# FILTRACJA POD STAŁYM CIŚNIENIEM I ZE STAŁĄ SZYBKościĄ



## OSAD - pory+ciało stałe,

Opory przepływu cieczy płynącej ruchem uwarstwionym przez utworzone kapilary można wyrazić poniższym równaniem (zmodyfikowane równanie Leva):

gdzie:

$\varepsilon$  - porowatość osadu,

$\varphi$  - czynnik kształtu ziaren,

$L$  - grubość warstwy osadu,

$u$  - prędkość przepływu cieczy,

$d_e$  - średnica zastępcza ziarna = (powierzchnia) $A_z$  /  $V_z$  (objętość) =  $6/a$ ,

$\alpha$  - współczynnik oporu osadu,

$\eta_L$  - współczynnik lepkości dynamicznej cieczy,

$$\Delta P = 200 \cdot \frac{\eta_L u L}{d_e^2} \cdot \left[ \frac{(1 - \varepsilon)^2}{\varepsilon^2} \varphi^2 \right]$$

Prędkość przepływu cieczy (szybkość filtracji) zdefiniowana jest następująco:

$$u = \frac{\Delta P}{\left[ \frac{k(1 - \varepsilon)^2 \cdot a^2 \cdot \varphi^2}{\varepsilon^2} \right] \cdot \eta_L L} = \frac{U_L}{A} = \frac{dV}{Ad\tau}$$

$$\text{gdzie: } \alpha = \frac{k(1 - \varepsilon)^2 \cdot a^2 \cdot \varphi^2}{\varepsilon^2}$$

Grubość warstwy osadu można wyrazić:

$$L = \frac{V \cdot x}{A(1 - \varepsilon) \cdot \rho_s}$$

gdzie:

$V$  - objętość filtratu,

$x$  - masa osadu przypadająca na jednostkę objętości czystego filtratu,

$A$  - powierzchnia filtracji,

Łącząc dwa powyższe równania można stwierdzić, że szybkość filtracji zależy:

$$\frac{dV}{Ad\tau} = \frac{\Delta P}{\frac{\eta_L \alpha x V}{A}}$$

powyższe równanie po uwzględnieniu oporu przegrody filtracyjnej można zatem zapisać następująco:

$$\frac{dV}{Ad\tau} = \frac{\Delta P}{\frac{\eta_L \alpha x}{A} \cdot (V + C)}$$

gdzie:

$R_M$  - opór przegrody filtracyjnej  $R_M = \frac{\alpha x C}{A}$ ,

$C$  - objętość filtratu jaki otrzymano by podczas filtracji gdyby tworzyć osad równy oporowi rzeczywistej przegrody filtracyjnej,



# FILTRACJA - OSADY NIEŚCISLIWE

## FILTRACJA POD STAŁYM CIŚNIENIEM

W przypadku osadów nieściśliwych istnieje stałość porowatości osadu przy zmianie ciśnienia.

Zatem:  $\alpha = \text{const}$ , bo  $\varepsilon = \text{const}$  i  $\Delta p = \text{const}$   
powyższe równanie, po rozdzieleniu zmiennych całkuje się w granicach

$$\int_0^V (V + C) dV = \int_0^\tau \frac{A^2 \cdot \Delta p}{\eta_L \alpha x} d\tau$$

Po rozwiązaniu, otrzymuje się

$$\frac{V^2}{2} + VC = \frac{A^2 \cdot \Delta p}{\eta_L \alpha x} \tau$$

gdzie:

$K$  i  $C$  - stałe filtracji wyznaczone doświadczalnie,

$$K = \frac{2A^2 \cdot \Delta p}{\eta_L \alpha x} \left[ \frac{\text{m}^6}{\text{s}} \right] \text{ i } C = \frac{A \cdot r_1}{\alpha x} \left[ \text{m}^3 \right]$$

gdzie:  $r_1$  - opór właściwy osadu,

stąd

$$V^2 + 2VC = K\tau$$

Wg powyższego równania zależność między czasem filtracji a objętością przesączu otrzymanego w tym czasie można zilustrować przy pomocy paraboli.

Jeśli przedstawione równanie się zrózniczkuje otrzyma się zależność na objętościowe natężenie przepływu

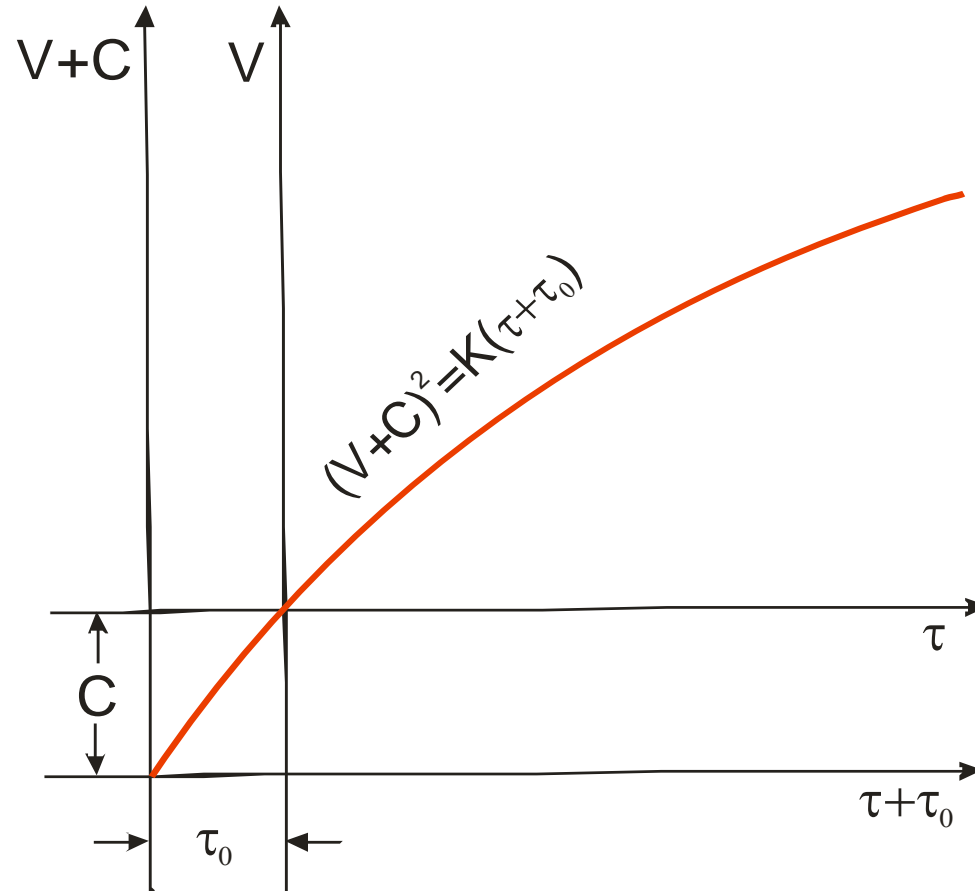
$$U = \frac{dV}{d\tau} = \frac{K}{V + 2C}$$

Dla  $A=1\text{m}^2$

$$K' = \frac{2 \cdot \Delta p}{\eta_L \alpha x} \left[ \frac{\text{m}^6}{\text{m}^4 \cdot \text{s}} \right] \quad \text{i} \quad C' = \frac{r_1}{\alpha x} \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{m}^2} \right]$$

inna postać równania

$$(V + C)^2 = K(\tau + \tau_0) \quad \text{gdzie} \quad \tau_0 = \frac{C^2}{K}$$



Jeżeli opór przegrody filtracyjnej jest nieznaczny w stosunku do oporu osadu szybkość filtracji można przedstawić następującym równaniem.

$$V^2 = \frac{2A^2 \Delta P}{\eta_L \alpha \cdot x} \tau = K \tau$$

# FILTRACJA PRZY STAŁYM OBJĘTOŚCIOWYM NATĘŻENIU PRZEPIĘTYWU

W tym przypadku  $\alpha = \text{const}$ , bo  $\varepsilon = \text{const}$  i  $\frac{dV}{d\tau} = \text{const} = \frac{V}{\tau}$  zatem

$$\frac{dV}{Ad\tau} = \frac{\Delta P}{\frac{\eta_L \alpha x}{A} (V + C)} = \frac{V}{A\tau} = \text{const}$$

Ponieważ objętościowe natężenie przepływu filtratu jest stałe i powierzchnia filtru jest niezmienna równanie można doprowadzić do następującej postaci

$$\left(\frac{V}{A\tau}\right)^2 \tau + \left(\frac{V}{A\tau}\right) \eta_L \alpha x C = \Delta p$$

Z zależności tej wynika, że utrzymanie stałej szybkości filtracji wymaga stałego wzrostu  $\Delta p$  z upływem czasu filtracji i jest to zależność liniowa.

## FILTRACJA - OSADY ŚCISLIWE

Większość osadów charakteryzuje się ściśliwością polegającą na zmniejszaniu się porów międzyziarnowych w miarę wzrostu ciśnienia wywieranego na osad.

Współczynnik ściśliwości  $s$  zawiera się w granicach od 0 do 1

$$\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon^3} = b \cdot P_c^s$$

Zmiana porowatości osadu pod wpływem zmieniającego się ciśnienia wywołuje zmianę oporu jaki stawia warstwa osadu przepływającej cieczy

$$R = r \frac{L}{A}$$

gdzie:  $r$  - opór właściwy osadu [ $\text{kg}/\text{m}^2 \cdot \text{s}$ ], opór jaki zachodziłby, przy przepływie jednostki objętości cieczy, w jednostce czasu przez osad o jednostce powierzchni i jednostce grubości,

$\alpha \neq \text{const}$ , bo warstwa osadu poddawana jest ciśnieniu o różnej wartości na różnych przekrojach,

$$\frac{dV}{Ad\tau} = \frac{A}{\eta_L x V} \cdot \frac{\Delta P}{r''}$$

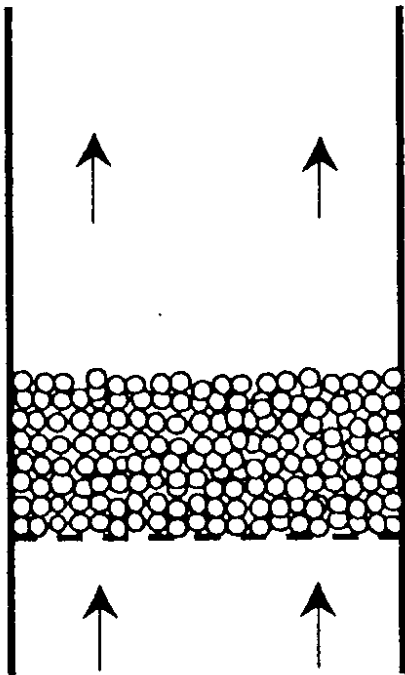
$$r'' = \frac{\Delta P}{\int_{\Delta P=0}^{\Delta P=P-P_1} \frac{dP}{r_m}} \quad r_m = f(\Delta P)$$

opór właściwy osadu można wyrazić następująco:

# FLUIDYZACJA

Proces polegający na uniesieniu sypkiego złoża materiału i zawieszeniu go w przepływającym płynie.

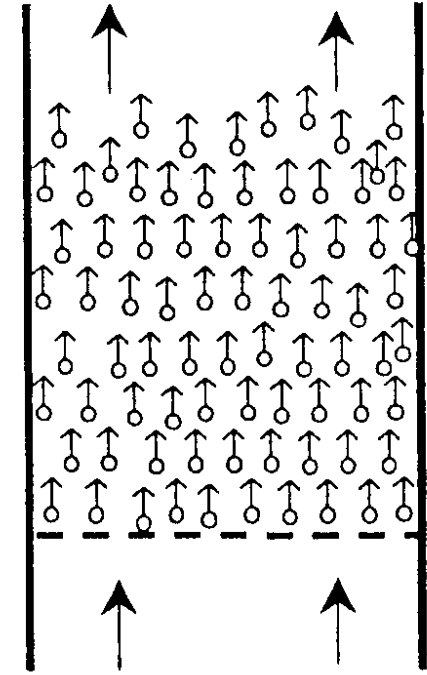
a)



b)



c)



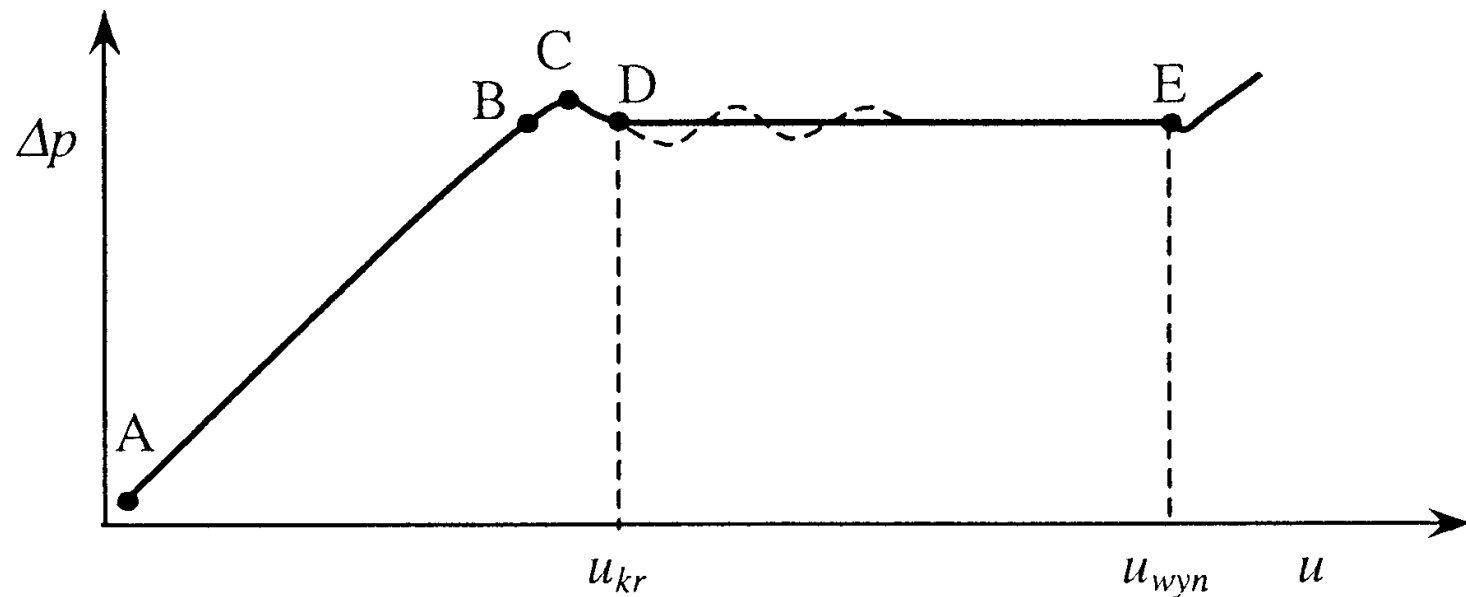
# FLUIDYZACJA



Proces polegający na uniesieniu sypkiego złoża materiału i zawieszeniu go w przepływającym płynie.

W procesie można wyróżnić trzy etapy:

1. Prędkość liniowa płynu jest zbyt mała by unieść złożę,
2. Prędkość liniowa płynu jest większa od pierwszej prędkości krytycznej - prędkości unoszenia,
3. Prędkość liniowa płynu jest większa od drugiej prędkości krytycznej - prędkości wynoszenia



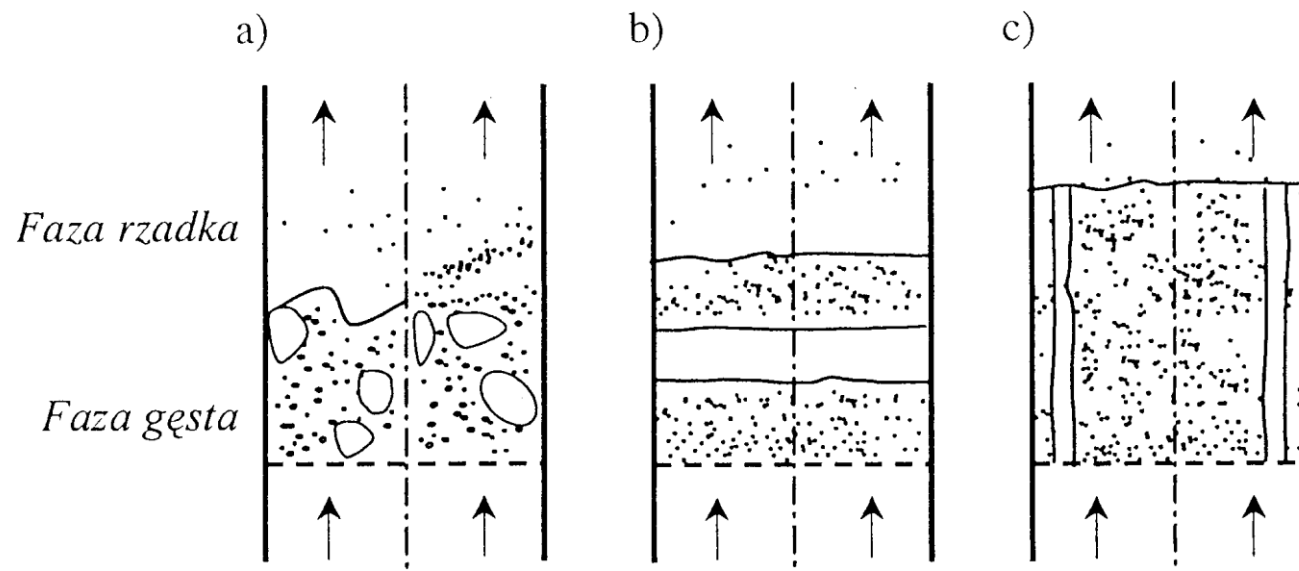
# FLUIDYZACJA

Prędkość krytyczna:

$$u = \frac{d_e^2 (\rho_s - \rho_f) g}{200 \eta \varphi^2} \cdot \left[ \frac{\varepsilon^3}{1 - \varepsilon} \right]$$

FLUIDYZACJA JEDNORODNA - złożę jest unoszone równomiernie, brak jest niejednorodności,

FLUIDYZACJA NIEJEDNORODNA - w złożu tworzą się kanały, a na powierzchni pojawiają się „wybryzgi”.





# WIROWANIE

Operacja polegająca na opadaniu cząstek w polu sił odśrodkowych.

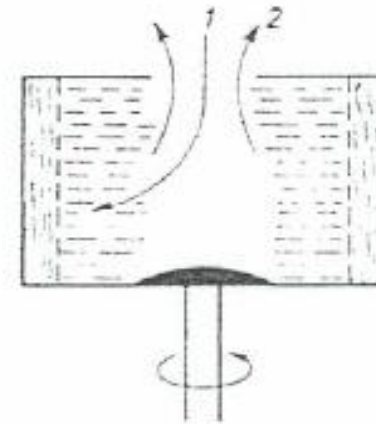
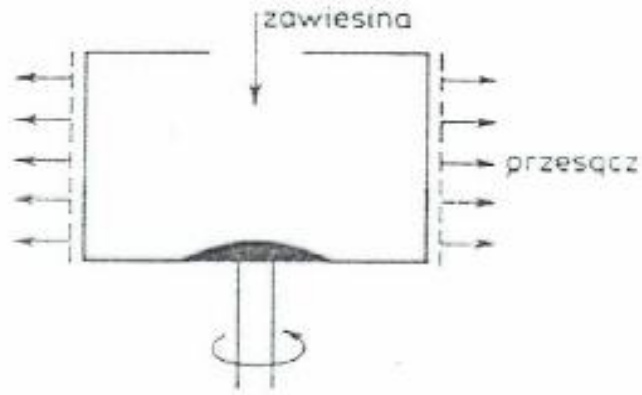
Rozdzielanie układów niejednorodnych odbywa się w wirówkach na zasadzie:

- **Filtracji pod działaniem siły odśrodkowej,**
- **Sedymentacji pod działaniem siły odśrodkowej,**

W wirówce działającej na zasadzie filtracji w pobocznicy bębna są otwory. Przegrodę filtracyjną stanowi tkanina ułożona na sitkach metalowych. Ciało stałe zatrzymywane jest na tkaninie a ciecz przepływa przez pory osadu i przegrody filtracyjnej.

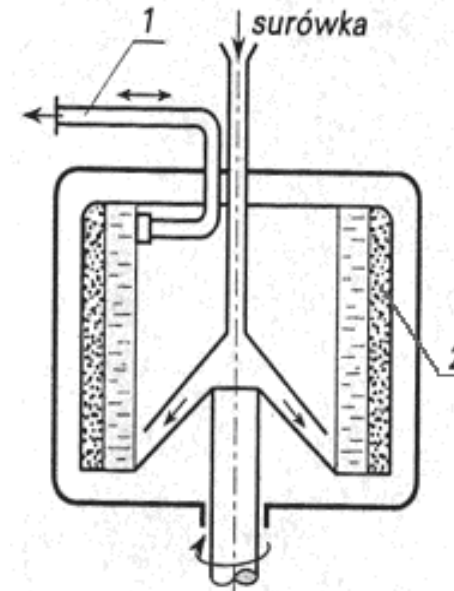
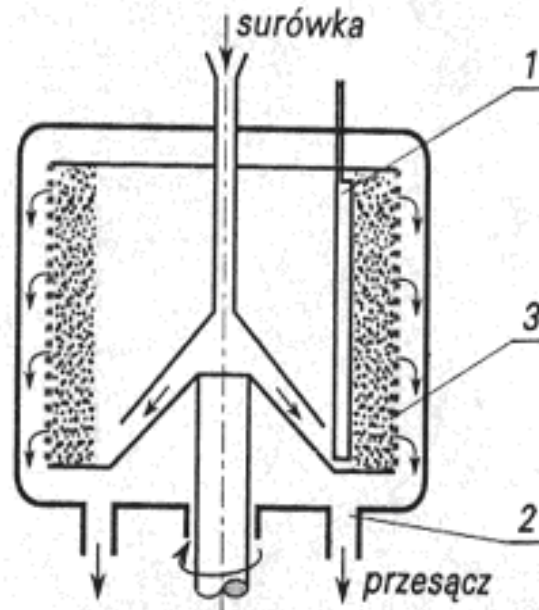
W wirówce działającej na zasadzie sedymentacji nie ma otworów w pobocznicy bębna. Ciało stałe osadza się na ścianie bębna. Rozdzielanie emulsji lub zawiesin przebiega tym lepiej, im różnica gęstości składników jest większa.

# WIROWANIE



Wirówki filtracyjne

Wirówki sedymentacyjne



# SIŁY ODŚRODKOWE >> SIŁ GRAWITACJI



gdy:

siła odśrodkowa < siła grawitacji

siła odśrodkowa = siła grawitacji

siła odśrodkowa > siła grawitacji

cząstki bezładnie wirują

cząstki poruszają się z bębniem

cząstki są dociskane do brzegów bębna

Przyspieszenie odśrodkowe:

$$\frac{u^2}{r} = \omega^2 \cdot r$$

Siła odśrodkowa:

$$F_r = \frac{mu^2}{r} = m\omega^2 \cdot r$$

Stosunek siły odśrodkowej do siły ciężkości wynosi:

$$\frac{F_r}{F_g} = \frac{\frac{mu^2}{r}}{mg} = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{\omega^2 r}{g}$$

uwzględniając, że prędkość kątowna  $\omega = 2\pi n$  oraz, że  $\pi^2 \cong g$  można stwierdzić:

$$\frac{F_r}{F_g} = \frac{(2\pi n)^2 r}{g} = 4n^2 r$$

Zatem, na prędkość poruszania się cząstki w bębnie ma wpływ liczba obrotów bębna  $n$  i promień obrotu  $r$ .

### WSPÓŁCZYNIK UWIELOKROTNIENIA (współczynnik rozdziału)

$$\Phi = \frac{\omega^2 r}{g} \text{ wiedząc, że } \omega = \frac{2\pi n}{60} [\text{sek.}^{-1}]$$

$$\Phi = \frac{(2\pi n)^2 r}{60^2 \cdot g} \approx \frac{nr^2}{900}$$

### WYDAJNOŚĆ WIROWANIA

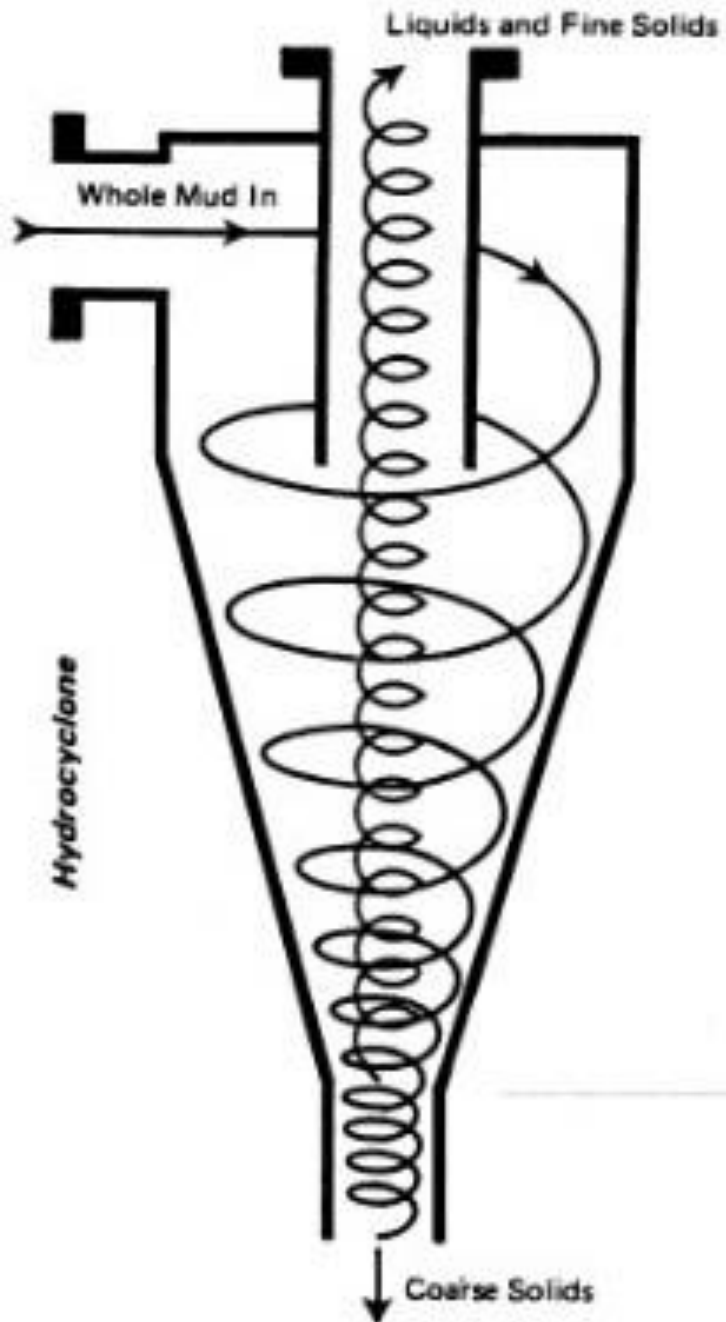
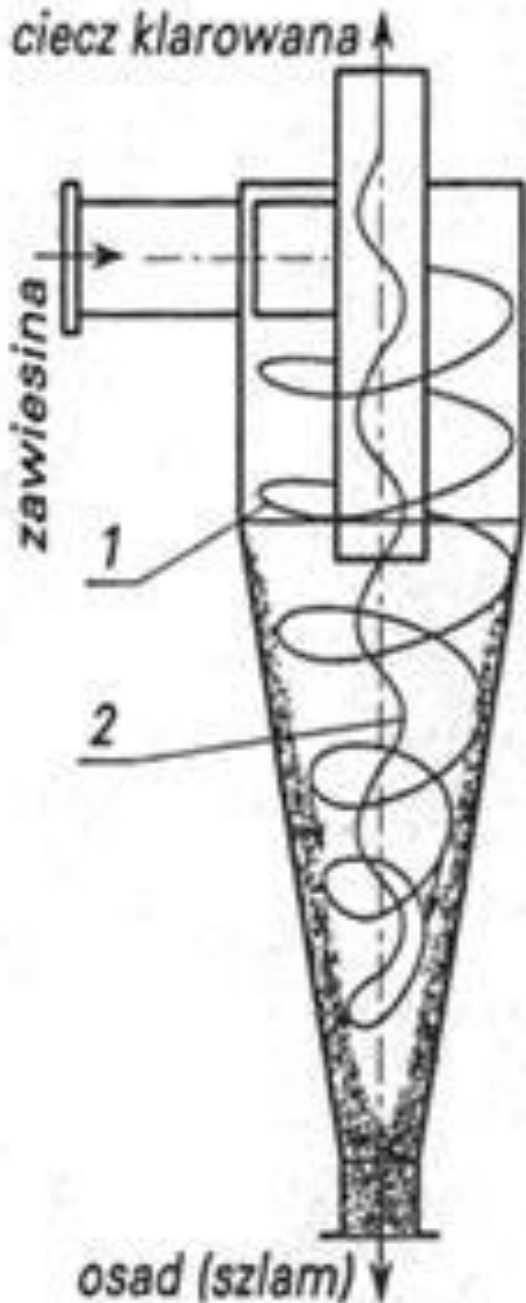
$$\frac{dV}{Ad\tau} = \frac{\Delta P}{\eta_L \left( \frac{\alpha x V}{A} + R_M \right)}$$

przy czym  $R_M$  (opór przegrody filtracyjnej) jest bardzo mały.

# HYDROCYKLON

Składa się z cylindrycznej części górnej i stożkowej dolnej oraz tzw. dysz: wlotowej, wylotowej (przelotowej) i wylewowej. Zawiesinę wprowadza się stycznie do części cylindrycznej dyszą wlotową pod ciśnieniem 0,1-0,5 MPa. Powoduje to wytworzenie wewnątrz hydrocyklonu *wiru*, tzw. *pierwotnego*, który przesuwa się do wierzchołka części stożkowej, z którego z kolei następuje zasadnicze wydzielenie cząstek ciała stałego. Cząstki większych rozmiarów, o większej bezwładności, pod działaniem siły odśrodkowej skierowane zostają ku ścianie i jednocześnie poruszając się w dół opuszczają hydrocyklon dyszą wylewową jako zatężona zawiesina. Na skutek dławienia wypływu z dyszy wylewowej wir pierwotny, zmienia kierunek i w postaci *wiru wtórnego* przepływa ku górze do dyszy wylotowej. Drobne cząstki odrzucone z wiru wtórnego porywane są przez wir pierwotny i skierowane z powrotem do wylewu, co zwiększa efekt rozdzielania. Konstrukcja hydrocyklonu, a szczególnie wymiary zasadnicze i materiał konstrukcyjny, zależne są od jego przeznaczenia i właściwości fizykochemicznych rozdzielanej zawiesiny.

# HYDROCYKLON



# Siła odśrodkowa zimą:



**DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ !**