



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

NAUKA O MATERIAŁACH

Wykład VIII: Odształcenie materiałów - właściwości sprężyste

JERZY LIS
Wydział Inżynierii Materiałowej i Ceramiki




Treść wykładu:

1. Właściwości materiałów – wprowadzenie
2. Klasyfikacja reologiczna odształcenia materiałów
3. Statyczna próba rozciągania
4. Odształcenie sprężyste
 - 4.1. Prawo Hooke'a – moduły sprężystości
 - 4.2. Właściwości sprężyste układu dwóch atomów
 - 4.3. Odształcenie sprężyste kryształów
 - 4.4. Właściwości sprężyste materiałów wielofazowych
 - 4.5. Właściwości sprężyste materiałów porowatych
 - 4.6. Metody pomiaru modułów sprężystości
 - 4.7. Niesprężystość




NAUKA O MATERIAŁACH VIII: Odształcenie materiałów – właściwości sprężyste



Właściwości tworzyw - wprowadzenie

- O możliwości zastosowania danego materiału decydują jego właściwości użytkowe
- Zachowanie się danego materiału w środowisku pracy to zaplanowana przez użytkownika (założona) odpowiedź na działające na niego czynniki (bodźce)

SCHEMAT ODDZIAŁYWANIA CZYNNIKÓW NA MATERIAŁ



```

graph LR
    A[czynnik (czas)] --> B[MATERIAŁ]
    B --> C[odzew (właściwości)]
  
```

NAUKA O MATERIAŁACH VIII: Odształcenie materiałów – właściwości sprężyste

AGH **Właściwości tworzyw - wprowadzenie**

PODEJŚCIE INŻYNIERSKIE

Materiał traktowany jest jak „czarna skrzynka” – nie interesuje nas jego charakterystyka a jedynie istniejące zależności funkcyjne

W przypadku parametrów ilościowych (mierzalnych):
odzew = funkcja (czynników)

Sprowadza się tę zależność do możliwie najprostszych funkcji (modeli) matematycznych, np.:

zależność liniowa -> prawo Hooke'a

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

Stale w danym modelu, charakterystyczne dla danego materiału, określane w ściśle zdefiniowanych warunkach, noszą nazwę stałych materiałowych

NAUKA O MATERIAŁACH VIII: Odkształcanie materiałów – właściwości sprężyste

AGH **Właściwości tworzyw - wprowadzenie**

PODEJŚCIE CHARAKTERYSTYCZNE DLA NAUKI O MATERIAŁACH

Materiał nie jest traktowany jak „czarna skrzynka”, lecz w myśli nauki o materiałach posiada swoją budowę, wynikającą ze sposobu jego otrzymywania

PODEJŚCIE CHARAKTERYSTYCZNE DLA NAUKI O MATERIAŁACH

Stale w modelach, charakterystyczne dla danego materiału (stale materiałowe) będą zależeć od jego budowy (sposobu otrzymywania).

NAUKA O MATERIAŁACH VIII: Odkształcanie materiałów – właściwości sprężyste

AGH **Właściwości tworzyw - wprowadzenie**

CZNNIK:	ODZEW:
ELEKTRO-MAGNETYCZNY	POLARYZACJA
	MAGNETYZM
	PRZEWODNOŚĆ
	CZĄSTKI WYSOKIEJ ENERGII
CIEPLNY	ROZSZERZALNOŚĆ
	TOPNIENIE
	PEŁNIENIE
MECHANICZNY	ODKŠZTAŁCENIE
	▣ SPRĘŻYSTE
	▣ PLASTYCZNE
	▣ ELEKOSPRĘŻYSTE
	DEKOHEZJA
CHEMICZNY	▣ KRUCHE
	▣ PLASTYCZNE
	▣ DYNAMICZNE
	EROZJA
	KOROZJA
	▣ GAZOWA
	▣ CIEPŁA
	▣ ELEKTROCHEM.

NAUKA O MATERIAŁACH VIII: Odkształcanie materiałów – właściwości sprężyste

AGH **Właściwości tworzyw - wprowadzenie**

Podstawowym czynnikiem weryfikującym materiały inżynierskie jest działanie sił (naprężeń)



Naprężenia mogą zmienić wymiary (odkształcenie liniowe, odkształcenie kątowe) lub ciągłość materiału (dekohezja)

NAUKA O MATERIAŁACH VIII: Odkształcenie materiałów – właściwości sprężyste

AGH **Modele odkształcenia**

Nauką opisującą nieniszczące odkształcanie się ciał (w czasie) pod wpływem działania sił jest **reologia**

- Reologia opiera się na modelach makroskopowych ciał poddawanych działaniu sił ścinania
- Modele te w sposób ogólny opisują zachowanie się ciał zarówno odkształcających się postaciowo (ciała sztywne, ciecze) jak i objętościowo (gazy)

W klasyfikacji reologicznej (makroskopowej) jako najbardziej typowe można przyjąć trzy podstawowe modele zachowania się ciał:


- odkształcenie sprężyste,
- odkształcenie plastyczne,
- odkształcenie lepkościowe

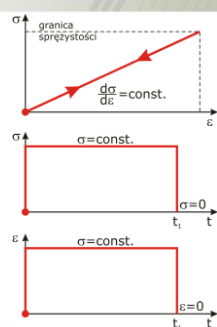
NAUKA O MATERIAŁACH VIII: Odkształcenie materiałów – właściwości sprężyste

AGH **Modele odkształcenia**

Odkształcenia sprężyste (odwracalne)

Ciało liniowo-sprężyste (Hooke'a)



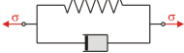
$$\sigma = E \cdot \epsilon$$


NAUKA O MATERIAŁACH VIII: Odkształcenie materiałów – właściwości sprężyste

AGH Modele odkształcenia

Odkształcenia sprężyste (odwracalne)

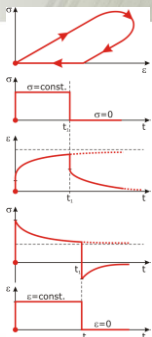
Ciało o sprężystości opóźnionej (Kelvina)



$$\sigma = E \cdot \varepsilon + \eta \cdot \frac{d\varepsilon}{dt}$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$$

τ - czas relaksacji



NAUKA O MATERIAŁACH VIII: Odkształcenie materiałów – właściwości sprężyste

AGH Modele odkształcenia


Odkształcenie plastyczne (nieodwracalne)

Ciało doskonale plastyczne

$$\sigma = \sigma_{max}$$

$$\tau = \tau_{max}$$

σ_{max}, τ_{max} - granica plastyczności



NAUKA O MATERIAŁACH VIII: Odkształcenie materiałów – właściwości sprężyste

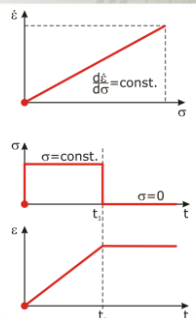
AGH Modele odkształcenia

Odkształcenie lepkościowe

Ciecz Newtona

$$\sigma = \eta \cdot \dot{\varepsilon}$$

η - współczynnik lepkości



NAUKA O MATERIAŁACH VIII: Odkształcenie materiałów – właściwości sprężyste

AGH Właściwości sprężyste

Zachowanie się materiałów pod wpływem naprężeń – statyczna próba rozciągania (ściskania, zginania,...)

NAUKA O MATERIAŁACH VIII: Odkształcenie materiałów – właściwości sprężyste

AGH Odkształcenie sprężyste

□ **Odkształcenie wzdłużne**

$$\epsilon_z = \frac{l_1 - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}$$

□ **Odkształcenie poprzeczne:**

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \frac{d_1 - d}{d} = -\frac{\Delta d}{d}$$

□ **Liczba Poissona:**

$$\nu = -\frac{\text{odkształcenie poprzeczne}}{\text{odkształcenie wzdłużne}} = -\frac{\epsilon_x}{\epsilon_z}$$

NAUKA O MATERIAŁACH VIII: Odkształcenie materiałów – właściwości sprężyste

AGH Odkształcenie sprężyste

□ **Odkształcenie ścinania:**

$$\frac{w}{l} = \text{tg } \gamma$$

Dla małych odkształceń:
($\text{tg } \gamma \approx \gamma$)

$$\frac{w}{l} \approx \gamma$$

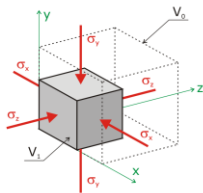
NAUKA O MATERIAŁACH VIII: Odkształcenie materiałów – właściwości sprężyste

AGH **Odształcenie sprężyste**

□ **Odształcenie objętościowe**

$$\vartheta = \frac{\Delta V}{V} = \frac{V_1 - V_0}{V_0} \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

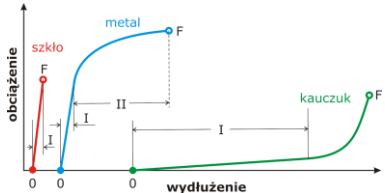
Odształcenie objętościowe jest równe sumie odkształceń liniowych w trzech wzajemnie prostopadłych kierunkach



NAUKA O MATERIAŁACH VIII: Odształcenie materiałów – właściwości sprężyste

AGH **Odształcenie sprężyste**

Rzeczywiste zachowanie się materiałów łączy ze sobą elementy zachowania modelowego sprężystego, plastycznego i lepkościowego



MATERIAŁY „KRUCHE”, „PLASTYCZNE”, „LEPKOSPŘĘŻYSTE”

NAUKA O MATERIAŁACH VIII: Odształcenie materiałów – właściwości sprężyste

AGH **Prawo Hooke'a - moduły sprężystości**

Dla materiałów sztywnych w pierwszym etapie przy rosnących naprężeniach materiały zachowują się sprężysto t.j. odkształcają się nietrwale.

W pewnym zakresie odkształcenie jest proporcjonalne do naprężenia.

Prawo Hooke'a

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

$$\tau = G \cdot \gamma$$

$$p = -K \cdot \vartheta$$

E - moduł Younga (sprężystości podłużnej)
G - moduł sztywności (ścianania, spręż. postaciowej)
K - moduł ściśliwości (spręż. objętościowej)
v - liczba Poissona (odkształcalności poprzecznej)

Moduły E, G, K i liczba Poissona określają właściwości sprężyste materiałów.

NAUKA O MATERIAŁACH VIII: Odształcenie materiałów – właściwości sprężyste

AGH Prawo Hooke'a - moduły sprężystości

Pytania:

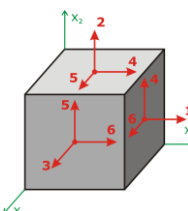
- od czego zależą moduły sprężystości materiałów?
- jak je można określić?
- jak je można zmieniać?

NAUKA O MATERIAŁACH VIII: Odkształcanie materiałów – właściwości sprężyste

AGH Prawo Hooke'a - moduły sprężystości

Układ trójwymiarowy, Prawo Hooke'a w postaci tensorowej:

$$\sigma_i = C_{ij} \epsilon_j \quad \text{lub} \quad \epsilon_i = S_{ij} \sigma_j$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix}$$


Pełna macierz sprężystości – 36 stałych

NAUKA O MATERIAŁACH VIII: Odkształcanie materiałów – właściwości sprężyste

AGH Prawo Hooke'a - moduły sprężystości

Wyższa symetria -> redukcja stałych sprężystości
Dla materiału izotropowego mamy 3 stałe: S_{11}, S_{12}, S_{44}

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \epsilon_1 = S_{11}\sigma_1 + S_{12}(\sigma_2 + \sigma_3) \\ \epsilon_2 = S_{11}\sigma_2 + S_{12}(\sigma_1 + \sigma_3) \\ \epsilon_3 = S_{11}\sigma_3 + S_{12}(\sigma_1 + \sigma_2) \\ \epsilon_4 = S_{44}\sigma_4 \\ \epsilon_5 = S_{44}\sigma_5 \\ \epsilon_6 = S_{44}\sigma_6 \end{cases}$$

Przy czym:
 $E = 1/S_{11}$
 $G = 1/S_{44}$
 $\nu = -S_{12}/S_{11}$

Zależność między stałymi materiałowymi:
 $E = 2G(1 + \nu)$

$$E = \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial \epsilon_j} \right)_{i=j=1,2,3}$$

$$G = \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial \epsilon_j} \right)_{i=j=4,5,6}$$

$$\nu = - \left(\frac{\partial \epsilon_i}{\partial \epsilon_j} \right)_{\sigma_i, \sigma_j}$$

NAUKA O MATERIAŁACH VIII: Odkształcanie materiałów – właściwości sprężyste

AGH Prawo Hooke'a - moduły sprężystości

Porównanie wielkości E dla różnych materiałów na podstawie danych M.F. Ashby'ego

1. Modułowo-Densywność
 Young's modulus E (GPa) (E = 1E, 9 ; R = E.3)
 Density, rho (Mg/m³)

NAUKA O MATERIAŁACH VIII: Odkształcanie materiałów – właściwości sprężyste

AGH Właściwości sprężyste układu dwóch atomów

Odkształcanie sprężyste w układzie dwóch atomów

Uproszczony wykres siły F działającej między dwoma atomami w dwuatomowej cząsteczce jako funkcja ich odległości x

NAUKA O MATERIAŁACH VIII: Odkształcanie materiałów – właściwości sprężyste

AGH Właściwości sprężyste układu dwóch atomów

W modelu rozważamy zależność naprężenia od odkształcenia dla dwu atomów odchylanych od położenia równowagi przez siłę zewnętrzną.

Działania sił zewnętrznych wywołuje wewnętrzną przeciwnie skierowaną reakcję układu

Zakładamy układ izolowany w którym atomy są odchylane od położenia równowagi (x_o) na niewielką odległość

$$\sigma = \frac{F}{a} \approx \frac{F}{r_o^2}$$

$$F \sim r$$

$$d\sigma = \frac{1}{r_o^2} \left(\frac{\partial F}{\partial r} \right)_{r=r_o} dr$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta r}{r_o}$$

$$d\varepsilon = \frac{dr}{r_o}$$

$$\int_0^\varepsilon d\sigma = \int_{r_o}^\varepsilon \frac{1}{r_o^2} \left(\frac{\partial F}{\partial r} \right)_{r=r_o} d\varepsilon$$

$$\sigma = \frac{1}{r_o} \left(\frac{\partial F}{\partial r} \right)_{r=r_o} d\varepsilon$$

NAUKA O MATERIAŁACH VIII: Odkształcanie materiałów – właściwości sprężyste

AGH Właściwości sprężyste układu dwóch atomów

$$\sigma = \frac{1}{r_0} \left(\frac{\delta F}{\delta r} \right)_{r=r_0} d\varepsilon$$

$$\sigma = C \cdot \varepsilon$$

gdzie: C - stała sprężystości ~ do modulu sprężystości

Im większa siła wiązania i im krótsze wiązanie tym większy moduł sprężystości materiału.

NAUKA O MATERIAŁACH VIII: Odształcanie materiałów – właściwości sprężyste

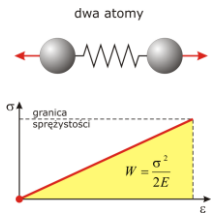
AGH Właściwości sprężyste

Energia odkształceń sprężystych

Gęstość energii, energia właściwa (ilość energii na jednostkę objętości) w [J/m³]

$$W = \int_0^{\varepsilon} \sigma \cdot \varepsilon \cdot d\varepsilon = \frac{E\varepsilon^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2E}$$

Energia jest równa polu pod krzywą σ - ε



NAUKA O MATERIAŁACH VIII: Odształcanie materiałów – właściwości sprężyste

AGH Odształcanie sprężyste kryształów

Porównanie wielkości E dla różnych materiałów

Stale materiałowe C_{ij} oraz moduły E i G [GPa] niektórych monokryształów o strukturze regularnej

Kryształ	C_{11}	C_{12}	$C_{44}=G$	E
MgO	343	95	124	310
UO ₂	395	121	65	338
β SiC	422	140	232	352
C (diament)	1062	125	575	1035
TiC _{0,94}	519	102	179	486
ZrC _{0,94}	450	99	153	414

NAUKA O MATERIAŁACH VIII: Odształcanie materiałów – właściwości sprężyste

AGH **Właściwości sprężyste mat. wielofazowych**

Model szeregowy

$$\frac{1}{E} = \frac{V_1}{E_1} + \frac{V_2}{E_2}$$

Model równoległy

$$E = V_1 E_1 + V_2 E_2$$

„prawo mieszanin”

E - moduł Younga, **V** - udział objętościowy fazy

NAUKA O MATERIAŁACH VIII: Odkształcanie materiałów – właściwości sprężyste

AGH **Właściwości sprężyste mat. wielofazowych**

Moduł Younga kompozytów

kompozyty umacniane cząstkami

udział fazy sztywniejszej V_2 [%]

NAUKA O MATERIAŁACH VIII: Odkształcanie materiałów – właściwości sprężyste

AGH **Właściwości sprężyste materiałów porowatych**

Fazę gazową w materiale można traktować jak fazę, dla której stała $E=0$

Stąd, z prawa mieszanin, moduł Younga materiału porowatego wynosi:

$$E = E_0 (1 - V_p)$$

gdzie:
 V_p - udział objętościowy porów
 E_0 - moduł Younga materiału gęstego

NAUKA O MATERIAŁACH VIII: Odkształcanie materiałów – właściwości sprężyste

AGH Właściwości sprężyste materiałów porowatych

W rzeczywistych materiałach istnieją różnego rodzaju defekty wewnętrzne które powodują powstawanie **koncentracji naprężeń**.
 Na skutek tego, lokalnie wewnątrz materiału naprężenia mogą znacznie przewyższać te przyłożone do niego na zewnątrz.

Rozwiązanie Inglisa dla pasma osłabionego otworem eliptycznym:

$$\sigma = \sigma_z \left(1 + 2 \sqrt{\frac{c}{\rho}} \right)$$

$$\sigma \approx 2\sigma_z \sqrt{\frac{c}{\rho}}$$

$$\rho \ll c$$

NAUKA O MATERIAŁACH VIII: Odkształcanie materiałów – właściwości sprężyste

AGH Właściwości sprężyste mat. porowatych

Ogólnie:

$$\sigma = k \cdot \sigma_z$$

gdzie: k - współczynnik koncentracji naprężeń

Stąd:

$$E = E_0 \cdot (1 - k \cdot V_p)$$

Na przykład dla porów eliptycznych wzór wynikający z hipotezy Rossi'ego:

$$k = \frac{5}{4} \frac{a}{c} + \frac{3}{4}$$

Względny moduł

Udział objętościowy porów

NAUKA O MATERIAŁACH VIII: Odkształcanie materiałów – właściwości sprężyste

AGH Metody pomiarów modułów sprężystości

Metody pomiarów modułów sprężystości

- stacyczne**
 - stacyczne próby odkształceniowe próbek materiałów (roszciganie) (ściskanie) (zginanie) (skręcanie)
- dynamiczne**
 - miar szybkości przejścia fali mechanicznej (m. ultradźwiękowe) (m. rezonansowe)

moduł zrelaksowany moduł niezrelaksowany

NAUKA O MATERIAŁACH VIII: Odkształcanie materiałów – właściwości sprężyste

AGH **Zjawisko niesprężystości**

Zjawisko zależności odkształcenia sprężystego od czasu nosi nazwę niesprężystości (sprężystości opóźnionej)

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + (\varepsilon_U - \varepsilon_R) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

ε_R – odkształcenie zrelaksowane
 ε_U – odkształcenie niezrelaksowane
 τ - czas relaksacji

NAUKA O MATERIAŁACH VIII: Odkształcanie materiałów – właściwości sprężyste

AGH **Zjawisko niesprężystości**

Procesy relaksacyjne odkształcenia sprężystego w materiałach

Jeżeli czas pomiaru właściwości sprężystych jest większy niż czas niezbędny dla zajścia danego procesu relaksacyjnego to proces ten nie będzie miał wpływu na pomiar

NAUKA O MATERIAŁACH VIII: Odkształcanie materiałów – właściwości sprężyste

AGH **Zjawisko niesprężystości**

$E_{niezrelaksowany} \geq E_{zrelaksowany}$

$$\varepsilon = \left(\frac{\sigma_0}{E_R}\right) + \left[\left(\frac{\sigma_0}{E_U}\right) - \left(\frac{\sigma_0}{E_R}\right)\right] \exp\left(-\frac{t}{\theta}\right)$$

a) $\frac{t}{\tau} \rightarrow 0 \quad \varepsilon \approx \frac{\sigma_0}{E_U}$
 b) $\frac{t}{\tau} \rightarrow \infty \quad \varepsilon \approx \frac{\sigma_0}{E_R}$

NAUKA O MATERIAŁACH VIII: Odkształcanie materiałów – właściwości sprężyste